Sumário

Olá, amigos do Estratégia Concursos, tudo bem?

O meu nome é Djefferson Maranhão. Sou Graduado em Ciência da Computação pela Universidade Federal do Maranhão (UFMA) e em Engenharia Civil pela Universidade Estadual do Maranhão (UEMA). Desde 2015, sou Auditor da Controladoria Geral do Estado do Maranhão (2015 - 5º lugar). Antes, porém, exerci os cargos de Analista de Sistemas na UFMA (2010 - 1º lugar) e no TJ-MA (2011 - 1º lugar).

Estive na posição de vocês por muito tempo e sei o quanto a vida de um concurseiro é atribulada! São vários assuntos para se dominar em um curto espaço de tempo. Nesse sentido, quero compartilhar com vocês o que aprendi ao longo dos anos, para auxiliá-los nessa jornada rumo à aprovação.

Um grande abraço,

Djefferson Maranhão

1. MÉDIA ARITMÉTICA SIMPLES

A média aritmética de um conjunto de dados é definida como o **quociente entre a soma de todos os elementos e o número deles**. **A propriedade principal da média é preservar a soma dos elementos de um conjunto de dados**.

Podemos adotar o seguinte raciocínio para encontrarmos a fórmula da média aritmética. Dada uma lista de n números, $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, a soma de seus termos é igual a:

$$\underbrace{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}_{n\,fatores}.$$

A média aritmética dessa lista é um número $\bar{x}$, tal que, se todos os elementos forem substituídos por $\bar{x}$, a soma da lista permanecerá preservada. Assim, substituindo todos os elementos por $\bar{x}$, teremos uma nova lista, $\{\bar{x}, \bar{x}, \cdots, \bar{x}\}$, cuja soma é:

$$\underbrace{\bar{x} + \bar{x} + \cdots + \bar{x}}_{n\,fatores} = n \times \bar{x}$$

Como as somas das duas listas são iguais, temos:

$$n \times \bar{x} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

Portanto, a média aritmética é:

$$\boxed{\boldsymbol{\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}}}$$

Reparem que no numerador somamos todos os elementos, ao passo que no denominador temos a quantidade de elementos somados (n).

EXEMPLIFICANDO

Calcule a média aritmética dos números 8, 16, 26 e 30.

Para responder a essa questão, somaremos os quatro números e, em seguida, dividiremos o resultado por quatro:

$$\bar{x} = \frac{8 + 16 + 26 + 30}{4} = \frac{80}{4} = 20$$

Portanto, 20 é o valor da média aritmética dos números 8, 16, 26 e 30.

Repare que a soma dos números da lista é $8 + 16 + 26 + 30 = 80$. Se os quatro números forem substituídos por 20, a soma também será $20 + 20 + 20 + 20 = 80$. Por isso, dizemos que **a média aritmética preserva a soma dos números.**

FIQUE ATENTO!

Sempre que a questão não especificar qual o tipo de média, faremos o cálculo da média aritmética.

RESUMINDO

Sobre a média aritmética, podemos afirmar que:

I – ela preserva a soma dos elementos da lista de números;

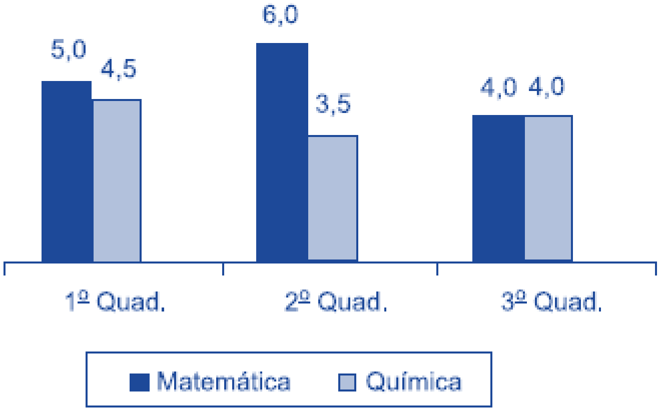
II – ela é obtida pelo quociente entre a soma de todos os elementos de um conjunto e quantidade de elementos nele existentes $\left(\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)$.

A soma total de um conjunto de dados é dada pela multiplicação entre a média do conjunto e a quantidade de termos. Isso decorre da própria definição de média aritmética:

$$\bar{x} = \frac{soma}{n} \Longrightarrow soma = n \times \bar{x}$$

Trata-se da mesma fórmula apresentada anteriormente, tendo apenas o termo "n" passado para o outro lado da igualdade, multiplicando a média.

(FITO/2020) O gráfico apresenta as notas de um aluno, nas disciplinas de matemática e química, nos três quadrimestres de 2019.



A média das notas de matemática desse aluno corresponde, da média das notas de química, a

a) 120%

b) 125%

c) 130%

d) 135%

e) 140%

Comentários:

A média aritmética é definida pelo quociente entre a soma dos valores de um determinado conjunto e a quantidade de valores nele existentes. Pelos valores dados no enunciado, a média das notas de matemática é:

$$\bar{x}_{mat} = \frac{5+6+4}{3}$$

$$\bar{x}_{mat} = \frac{15}{3}$$

$$\bar{x}_{mat} = 5$$

Já a média das notas de química é:

$$\bar{x}_{quím} = \frac{4{,}5+3{,}5+4}{3}$$

$$\bar{x}_{quím} = \frac{12}{3}$$

$$\bar{x}_{quím} = 4$$

Com isso, em termos percentuais, a média das notas de matemática desse aluno corresponde, da média das notas de química, a:

$$\frac{5}{4} = 1{,}25 = 125\%$$

Gabarito: B.

(CESPE/UNCISAL/2019) A crise mundial tem contribuído para o aumento da entrada de estrangeiros no Brasil. A maior parte vem de países vizinhos, a exemplo do Paraguai. A tabela a seguir apresenta, de acordo com dados do Ministério da Justiça, a quantidade de paraguaios que vieram para o Brasil nos anos de 2009, 2011 e 2012.

Ano	Paraguaios
2009	11000
2010	?
2011	19000
2012	27300

Disponível em: http://reporterbrasil.org.br. Acesso em: 9 nov. 2018 (adaptado).

Se a média anual de imigrantes paraguaios para o Brasil, no período de 2009 a 2012, foi de 17 600, então, quantos paraguaios imigraram para o Brasil em 2010?

a) 13 100

b) 14 325

c) 15 000

d) 15 840

e) 17 600

Comentários:

A questão informa que a média anual de imigrantes paraguaios no Brasil, no período de 2009 a 2012, foi de 17.600. Como sabemos, a média é dada pela soma dos dados dividida pelo número de observações. Então, se considerarmos que o número de imigrantes em 2010 foi x, teremos:

$$\bar{x} = \frac{11000 + x + 19000 + 27300}{4}$$

$$17600 = \frac{57300 + x}{4}$$

$$4 \times 17600 = 57300 + x$$

$$70400 = 57300 + x$$

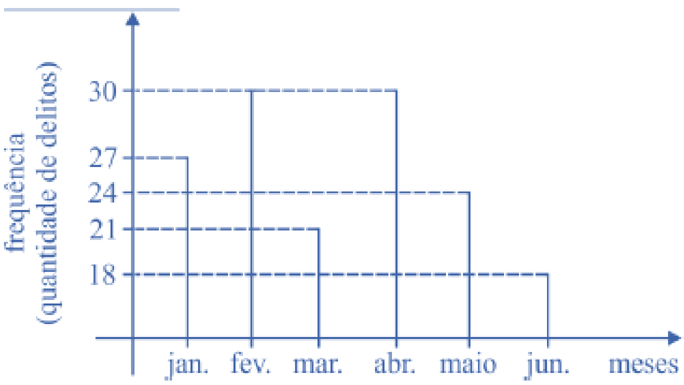
$$x = 70400 - 57300$$

$$x = 13.100$$

Gabarito: A.

(CESPE/PM AL/2018*)* Acerca de análise de dados, julgue o próximo item.

O gráfico a seguir mostra a distribuição de frequência de delitos ocorridos em determinado bairro nos seis primeiros meses de 2018.



Nesse caso, a média dos delitos ocorridos no semestre considerado foi superior à média dos delitos ocorridos no segundo trimestre.

Comentários:

Precisamos calcular duas médias: do segundo trimestre e do semestre inteiro.

Conforme o gráfico, para o segundo trimestre, temos:

$$\begin{cases} abril = 30\ delitos \\ maio = 24\ delitos \\ junho = 18\ delitos \end{cases}$$

A média é dada pela soma de todos os valores dividida pelo número de meses. Logo:

$$\bar{x} = \frac{30 + 24 + 18}{3}$$

$$\bar{x} = \frac{72}{3} = 24$$

Para o semestre, temos:

$$\begin{cases} janeiro = 27\ delitos \\ fevereiro = 30\ delitos \\ março = 21\ delitos \\ segundo\ trimestre = 72\ delitos \end{cases}$$

Logo:

$$\bar{x} = \frac{27 + 30 + 21 + 72}{6}0$$

$$\bar{x} = \frac{150}{6} = 25$$

Então, podemos concluir que o número de delitos no semestre foi maior que no segundo trimestre.

Gabarito: Certo.

1.1 Propriedades da Média Aritmética

Nessa seção, vamos estudar algumas propriedades importantes sobre a média aritmética.

TOME NOTA!

<u>1ª Propriedade:</u> Dado um conjunto com $n \geq 1$ elementos, a média aritmética sempre existirá e será única.

Desde que o conjunto tenha pelo menos um elemento, podemos afirmar que a média aritmética sempre existe, pois sempre conseguiremos calcular o quociente entre a soma dos elementos e o número deles. Além disso, como o somatório dos elementos resulta em um único número, o valor da média também sempre será único.

TOME NOTA!

2ª Propriedade: **A média aritmética $\overline{x}$ de um conjunto de dados satisfaz a expressão $m \leq \overline{x} \leq M$, em que m e M são, respectivamente, os elementos que representam o valor mínimo e o valor máximo desse conjunto.**

$$\boldsymbol{mínimo \leq \overline{x} \leq Máximo}$$

Essa propriedade diz respeito ao fato de a média aritmética sempre se encontrar entre os números mínimo e máximo de um conjunto.

EXEMPLIFICANDO

Para exemplificar essa propriedade, vamos tomar como base a sequência $\{x_n\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, com média $\bar{x} = 3$.

Reparem que o valor mínimo desse conjunto é 1 e o máximo é 5. Portanto, a média encontrada satisfaz a 2ª propriedade:

$$1 \leq \bar{x} \leq 5$$

Se a sequência fosse $\{y_n\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, teríamos como média:

$$\bar{y} = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9}{9} = \frac{45}{9} = 5$$

Assim, o valor mínimo seria 1 e o máximo 9. Novamente a propriedade continuaria válida, pois:

$$1 \leq \bar{x} \leq 9$$

Essa propriedade sempre será válida, seja qual for a sequência escolhida.

Alguns alunos costumam me pedir para demonstrar as propriedades apresentadas na aula, pois sentem mais facilidade de assimilar o conteúdo dessa maneira. Entendo, porém, que essa informação não é relevante para a maioria. Por isso, sempre que a demonstração for um pouco mais complexa, colocarei a dedução em uma seção "indo mais fundo!". Vamos lá!

Se m e M são os valores mínimo e máximo de um conjunto, então, necessariamente, todos os elementos desse conjunto serão maiores ou iguais a m e menores ou iguais a M, ou seja, $m \leq x_i \leq M$, para $i = 1, 2, 3, \cdots, n$. Assim, podemos fazer:

$$m \leq x_1 \leq M$$

$$m \leq x_2 \leq M$$

$$\vdots$$

$$m \leq x_n \leq M$$

Somando as n inequações, obtemos:

$$n \times m \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq n \times M$$

Agora, dividindo tudo por n, temos:

$$m \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leq M$$

Portanto, concluímos que a média está sempre entre os valores mínimo e máximo de um conjunto:

$$\boldsymbol{m \leq \overline{x} \leq M}$$

TOME NOTA!

<u>3ª Propriedade:</u> Somando-se (ou subtraindo-se) uma constante c de todos os valores de uma variável, a média do conjunto fica aumentada (ou diminuída) dessa constante.

$$\bar{y} = \bar{x} + c \quad \text{ou} \quad \bar{y} = \bar{x} - c$$

EXEMPLIFICANDO

Para exemplificar essa propriedade, vamos tomar como base a sequência $\{x_n\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, com média $\bar{x} = 3$.

Se adicionarmos uma constante 5 a cada um de seus números, vamos obter uma nova lista $\{x_n + 5\} = \{6, 7, 8, 9, 10\}$, cuja média é:

$$\overline{x + 5} = \frac{6 + 7 + 8 + 9 + 10}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

Veja que, como acrescentamos 5 a cada um dos números da lista, a média também aumentou 5 unidades, de 3 foi para 8.

INDO MAIS FUNDO!

Vejamos como demonstrar a propriedade para a adição de uma constante. Esse mesmo raciocínio pode ser seguido para a subtração de uma constante.

Seja $\{x_n\}$ uma sequência de números:

$$\{x_n\} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\},$$

e $\bar{x}$ a média aritmética dos termos dessa sequência:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Seja $\{y_n\}$ uma sequência de números formada pela adição de uma constante c a cada um dos termos de $\{x_n\}$:

$$\{y_n\} = \{x_n + c\} = \{x_1 + c, x_2 + c, \cdots, x_n + c\},$$

e $\bar{y}$ a média aritmética dos termos dessa nova sequência:

$$\bar{y} = \frac{(x_1 + c) + (x_2 + c) + \cdots + (x_n + c)}{n}$$

$$\bar{y} = \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + \overbrace{(c + c + \cdots + c)}^{n\ termos}}{n}$$

$$\bar{y} = \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + n \times c}{n}$$

$$\bar{y} = \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}{n} + \frac{n \times c}{n}$$

$$\bar{y} = \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}{n} + c$$

Portanto, ao adicionarmos uma constante c aos elementos de um conjunto, a média do novo conjunto foi aumentada em c:

$$\bar{y} = \bar{x} + c$$

TOME NOTA!

<u>4ª Propriedade:</u> Multiplicando-se (ou dividindo-se) uma constante c de todos os valores de uma variável, a média do conjunto fica multiplicada (ou dividida) por esta constante.

$$\boldsymbol{\bar{y} = \bar{x} \times c} \quad \textbf{ou} \quad \boldsymbol{\bar{y} = \bar{x} \div c}$$

EXEMPLIFICANDO

Para exemplificar essa propriedade, vamos tomar como base a sequência $\{x_n\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, com média $\bar{x} = 3$.

Se multiplicarmos cada um de seus elementos por uma constante 5, vamos obter uma nova lista $\{x_n \times 5\} = \{5, 10, 15, 20, 25\}$, cuja média é:

$$\overline{x \times 5} = \frac{5 + 10 + 15 + 20 + 25}{5} = \frac{75}{5} = 15$$

Veja que, como multiplicamos cada um dos números da lista por 5, a média também foi multiplicada por 5, aumentando de 3 para 15.

INDO MAIS FUNDO!

Vejamos como demonstrar a propriedade para a multiplicação por uma constante. Esse mesmo raciocínio pode ser seguido para a divisão por uma constante.

Seja $\{x_n\}$ uma sequência de números:

$$\{x_n\} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\},$$

e $\bar{x}$ a média aritmética dos termos dessa sequência:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Seja $\{y_n\}$ uma sequência de números formada pela multiplicação de cada um dos termos de $\{x_n\}$ por uma constante c:

$$\{y_n\} = \{x_n \times c\} = \{x_1 \times c, x_2 \times c, \cdots, x_n \times c\},$$

e $\bar{y}$ a média aritmética dos termos dessa nova sequência:

$$\bar{y} = \frac{(x_1 \times c) + (x_2 \times c) + \cdots + (x_n \times c)}{n}$$

$$\bar{y} = \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \times c}{n}$$

$$\bar{y} = \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \times c$$

Portanto, ao multiplicarmos os elementos de um conjunto por uma constante c, a média do novo conjunto também foi multiplicada por c:

$$\bar{y} = \bar{x} \times c$$

TOME NOTA!

<u>5ª Propriedade:</u> A soma algébrica dos desvios em relação à média é nula.

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$$

EXEMPLIFICANDO

Para exemplificar essa propriedade, vamos tomar como base a sequência $\{x_n\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, com média $\bar{x} = 4$.

O desvio em relação à média é a diferença entre cada elemento da sequência e a média aritmética. Como a sequência possui 7 elementos, teremos o mesmo número de desvios para calcular. Logo, basta encontrarmos a diferença entre cada elemento e a média:

$$d_1 = x_1 - \bar{x} = 1 - 4 = -3$$
$$d_2 = x_2 - \bar{x} = 2 - 4 = -2$$
$$d_3 = x_3 - \bar{x} = 3 - 4 = -1$$
$$d_4 = x_4 - \bar{x} = 4 - 4 = 0$$
$$d_5 = x_5 - \bar{x} = 5 - 4 = 1$$
$$d_6 = x_6 - \bar{x} = 6 - 4 = 2$$
$$d_7 = x_7 - \bar{x} = 7 - 4 = 3$$

Agora, somaremos todos esses desvios:

$$\sum_{i=1}^{7} d_i = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 + d_7$$
$$\sum_{i=1}^{7} d_i = (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3$$
$$\sum_{i=1}^{7} d_i = 0$$

Portanto, não importa qual a sequência de números, a soma dos desvios em relação à média é sempre igual a zero.

INDO MAIS FUNDO!

Vejamos como demonstrar essa propriedade.

Seja $\{x_n\}$ uma sequência de números:

$$\{x_n\} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\},$$

e $\bar{x}$ a média aritmética dos termos dessa sequência:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \Rightarrow x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \bar{x} \times n$$

A soma dos desvios em relação à média é dada por:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \bar{x}$$

A média é um valor constante para essa sequência de números, portanto, podemos tirá-la do somatório:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \bar{x} \times \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \bar{x} \times n$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - \bar{x} \times n$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = \bar{x} \times n - \bar{x} \times n$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$$

TOME NOTA!

<u>6ª Propriedade:</u> A soma dos quadrados dos desvios da sequência de números $\{x_i\}$, em relação a um número a, é mínima se a for a média aritmética dos números.

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 \geq \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Essa propriedade afirma que, caso os desvios sejam calculados com relação a um número diferente da média, e os resultados de tais desvios sejam elevados ao quadrado e somados, teremos um número necessariamente maior do que obteríamos caso a mesma operação fosse realizada utilizando-se a média.

EXEMPLIFICANDO

Para exemplificar essa propriedade, vamos tomar como exemplo a sequência $\{x_n\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, com média $\bar{x} = 4$. Já calculamos os desvios desses números em relação à média, vamos relembrar:

$$d_1 = x_1 - \bar{x} = 1 - 4 = -3$$
$$d_2 = x_2 - \bar{x} = 2 - 4 = -2$$
$$d_3 = x_3 - \bar{x} = 3 - 4 = -1$$
$$d_4 = x_4 - \bar{x} = 4 - 4 = 0$$
$$d_5 = x_5 - \bar{x} = 5 - 4 = 1$$
$$d_6 = x_6 - \bar{x} = 6 - 4 = 2$$
$$d_7 = x_7 - \bar{x} = 7 - 4 = 3$$

Na propriedade anterior, vimos que a soma dos desvios é sempre igual a zero. Agora, calcularemos a soma dos quadrados desses desvios. Em outras palavras, vamos elevar cada um deles ao quadrado e somar todos os resultados:

$$\sum_{i=1}^{7} d_i^2 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 + d_6^2 + d_7^2$$

$$\sum_{i=1}^{7} d_i^2 = (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2$$

$$\sum_{i=1}^{7} d_i^2 = 9 + 4 + 1 + 0 + 1 + 4 + 9$$

$$\sum_{i=1}^{7} d_i^2 = 28$$

A propriedade nos garante que, para essa sequência numérica, o valor 28 é o menor valor possível. Isto é, se encontrarmos os desvios em relação a outro número (diferente da média) e, em seguida, calcularmos a soma dos quadrados dos desvios, o valor obtido será maior que 28.

Vamos ver o que acontece ao calcularmos o desvio em relação ao número 6:

$$d_1 = x_1 - \bar{x} = 1 - 6 = -5$$

$$d_2 = x_2 - \bar{x} = 2 - 6 = -4$$

$$d_3 = x_3 - \bar{x} = 3 - 6 = -3$$

$$d_4 = x_4 - \bar{x} = 4 - 6 = -2$$

$$d_5 = x_5 - \bar{x} = 5 - 6 = -1$$

$$d_6 = x_6 - \bar{x} = 6 - 6 = 0$$

$$d_7 = x_7 - \bar{x} = 7 - 6 = 1$$

Agora, calcularemos a soma dos quadrados desses números:

$$\sum_{i=1}^{7} d_i^2 = (-5)^2 + (-4)^2 + (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2$$

$$\sum_{i=1}^{7} d_i^2 = 25 + 16 + 9 + 4 + 1 + 0 + 1 = 56$$

Como esperávamos, o resultado foi maior do que 28.

Vejamos como demonstrar essa propriedade.

Seja $\{x_n\}$ uma sequência de números:

$\{x_n\} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$,

e $\bar{x}$ a média aritmética dos termos dessa sequência:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \Rightarrow x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \bar{x} \times n$$

A soma dos quadrados dos desvios em relação a um número $\boldsymbol{a}$ é dada por:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{n}[(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - a)]^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{n}[2 \times (x_i - \bar{x}) \times (\bar{x} - a)] + \sum_{i=1}^{n}(\bar{x} - a)^2$$

O valor de $(\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{a})$ é uma constante, portanto, podemos simplificar essa expressão:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + 2 \times (\bar{x} - a) \times \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - a)^2 \sum_{i=1}^{n} 1$$

Pela propriedade anterior, sabemos que o somatório dos desvios em relação à média é zero, logo:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + 2 \times (\bar{x} - a) \times 0 + (\bar{x} - a)^2 \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + n \times (\bar{x} - a)^2$$

Para que o valor da soma seja mínimo, é necessário que $(\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{a})^{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{0}$. Para qualquer valor diferente disso, teremos um valor maior que o mínimo. Logo, para que a soma dos quadrados tenha valor mínimo, obrigatoriamente, teremos $a = \bar{x}$.

2. MÉDIA PONDERADA

Muitas vezes, certos elementos de um conjunto de dados possuem relevância maior que os demais. Nessa situação, para calcular a média de tais conjuntos, devemos encontrar uma média ponderada**. Uma média ponderada é a média de um conjunto de dados cujos valores possuem pesos variados**. Ela é calculada pela igualdade a seguir, em que p é o peso de cada valor de x:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i \times p_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$$

Observe que no numerador cada valor será multiplicado pelo seu respectivo peso, enquanto no denominador teremos a soma de todos os pesos.

Suponha que um candidato tenha prestado um concurso público para o cargo de Auditor Fiscal, alcançando as seguintes notas:

Disciplina	Nota (x_i)
Língua Portuguesa	4,0
Direito Administrativo	4,0
Direito Constitucional	4,0
Direito Tributário	7,0
Legislação Tributária	7,0
Contabilidade	8,0
Auditoria	8,0

Considere, também, que o edital desse concurso previa que algumas disciplinas teriam importância maior do que outras, por isso foram atribuídos pesos diferentes às várias disciplinas. Digamos que os pesos tenham sido distribuídos da seguinte forma:

Disciplina	Peso (p_i)
Língua Portuguesa	1
Direito Administrativo	2
Direito Constitucional	2
Direito Tributário	3
Legislação Tributária	3

Contabilidade	3
Auditoria	3

Agora, admita que o candidato deveria alcançar uma nota 7,0 ou superior na prova objetiva para que fosse convocado para a etapa discursiva. Se você fosse um dos avaliadores desse concurso, você consideraria o candidato aprovado na prova objetiva?

Para responder a esse questionamento, devemos calcular a média aritmética ponderada desse candidato, levando em consideração os pesos de cada disciplina. Dessa forma, devemos multiplicar cada nota pelo seu respectivo peso, somar esses produtos e dividir pela soma dos pesos.

Disciplina	Nota (x_i)	Peso (p_i)	$x_i \times p_i$
Língua Portuguesa	4,0	1	4,0 x 1 = 4,0
Direito Administrativo	4,0	2	4,0 x 2 = 8,0
Direito Constitucional	4,0	2	4,0 x 2 = 8,0
Direito Tributário	6,0	3	6,0 x 3 = 18,0
Legislação Tributária	6,0	3	6,0 x 3 = 18,0
Contabilidade	7,0	3	7,0 x 3 = 21,0
Auditoria	7,0	3	7,0 x 3 = 21,0

Nesse ponto, temos uma lista contendo todos os produtos de notas e pesos. Então, a média aritmética ponderada é dada por:

$$\bar{x} = \frac{x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \cdots + x_n \times p_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$$

$$\bar{x} = \frac{4{,}0 + 8{,}0 + 8{,}0 + 18{,}0 + 18{,}0 + 21{,}0 + 21{,}0}{1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3} = \frac{98}{15} \cong 6{,}53$$

Veja que, com essas notas, o candidato não seria convocado para a etapa discursiva.

(AVAREPREV/2020) Uma loja trabalha com produtos que são classificados em apenas três tipos. Na tabela, constam os preços de venda de cada tipo do produto:

Tipo do produto	Preço unitário de venda
A	R$ 10,00
B	R$ 12,00
C	R$ 15,00

No último dia útil de funcionamento, foram vendidos produtos dos três tipos, sendo que, do total de unidades vendidas, $\frac{1}{4}$ foi de produtos do tipo A, $\frac{2}{5}$ foi de produtos do tipo B, e o restante, de produtos do tipo C. Naquele dia, o preço médio unitário de venda dos produtos vendidos foi de

a) R$ 11,95.

b) R$ 12,30.

c) R$ 12,55.

d) R$ 13,50.

e) R$ 13,95.

Comentários:

Segundo o enunciado, temos que:

- total de produtos do tipo A vendidos: $\frac{1}{4} = 25\%$;
- total de produtos do tipo B vendidos: $\frac{2}{5} = 40\%$;
- total de produtos do tipo C vendidos: $100\% - 25\% - 40\% = 35\%$.

Portanto, o preço médio unitário de venda será definido como uma média ponderada, em que os pesos serão as porcentagens acima. Nesse sentido, devemos lembrar que a média ponderada é o somatório dos produtos de cada valor por seu respectivo peso, dividido pela soma dos pesos.

Logo,

$$\bar{x} = \frac{10 \times 25\% + 12 \times 40\% + 15 \times 35\%}{25\% + 40\% + 35\%}$$

$$\bar{x} = \frac{10 \times 25\% + 12 \times 40\% + 15 \times 35\%}{100\%}$$

$$\bar{x} = 10 \times 0{,}25 + 12 \times 0{,}40 + 15 \times 0{,}35$$

$$\bar{x} = 2{,}5 + 4{,}8 + 5{,}25$$

$$\bar{x} = R\$\ 12{,}55$$

Gabarito: C.

(CESPE/Pref. São Cristóvão/2019) A tabela seguinte mostra a distribuição das idades dos 30 alunos da turma A do quinto ano de uma escola de ensino fundamental.

Idade (em anos)	9	10	11	12	13	14
Quantidade de estudantes	6	22	0	1	0	1

A partir dessa tabela, julgue o item.

Se, em outra turma B, as frequências das idades fossem respectivamente iguais ao dobro das frequências da turma A, então a média aritmética das idades da turma B seria igual ao dobro da média da turma A.

Comentários:

A média das idades da turma A é uma média ponderada, em que os pesos são representados pelas quantidades de alunos. Assim, a média resulta da divisão entre o somatório dos produtos de idades e quantidades de estudantes e o total de estudantes:

$$\bar{x} = \frac{9 \times 6 + 10 \times 22 + 11 \times 0 + 12 \times 1 + 13 \times 0 + 14 \times 1}{6 + 22 + 0 + 1 + 0 + 1}$$

$$\bar{x} = \frac{300}{30}$$

$$\bar{x} = 10$$

Na turma B, teremos que duplicar as frequências. Dessa forma, a média da turma B será dada por:

$$\bar{x} = \frac{9 \times 12 + 10 \times 44 + 11 \times 0 + 12 \times 1 + 13 \times 0 + 14 \times 2}{12 + 44 + 0 + 2 + 0 + 2}$$

$$\bar{x} = \frac{600}{60}$$

$$\bar{x} = 10$$

Com isso, percebemos que a média não mudará o seu valor.

Gabarito: Errado.

(CESPE/IFF/2018) No registro das quantidades de filhos de 200 casais, verificaram-se os valores mostrados na tabela seguinte.

Quantidade de filhos	1	2	0	3	4	5	6
Quantidade de casais	50	40	40	30	25	10	5

Nesse caso, a quantidade média de filhos para esse grupo de casais é igual a

a) 0.

b) 1.

c) 2.

d) 2,5.

e) 3.

Comentários:

A quantidade média de filhos é uma média ponderada, em que os pesos são representados pelas quantidades de casais. Portanto, a média é resultado da divisão entre o somatório dos produtos de quantidades de filhos e quantidades de casais, dividido pelo total de casais:

$$\bar{x} = \frac{1 \times 50 + 2 \times 40 + 0 \times 40 + 3 \times 30 + 4 \times 25 + 5 \times 10 + 6 \times 5}{200}$$

$$\bar{x} = \frac{50 + 80 + 90 + 100 + 50 + 30}{200}$$

$$\bar{x} = \frac{400}{200}$$

$$\bar{x} = 2$$

Gabarito: C.

3. MÉDIA PARA DADOS AGRUPADOS

Em estatística, os dados podem ser definidos como informações que representam os atributos qualitativos ou quantitativos de uma variável ou de um conjunto de variáveis. Esses dados podem ser classificados em agrupados e não-agrupados. Normalmente, logo após a etapa de coleta, temos dados não-agrupados ou dados brutos.

Por exemplo, suponha que o Estratégia Concursos esteja realizando um experimento com um grupo de dez alunos, para mensurar o tempo médio de resposta a uma questão de estatística. Logo após a coleta, os dados ainda estão brutos, pois não passaram por nenhuma análise nem foram agrupados de alguma forma. Então, teríamos uma tabela similar a seguinte:

Aluno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tempo médio (em min)	1	3	5	7	9	6	6	5	3	9

Por sua vez, os dados agrupados são aqueles que passaram por algum nível de análise, o que significa que já não são brutos. **Os dados agrupados podem ser organizados por frequência de um determinado valor ou por intervalos de classes**. Quando por frequência de valor, os dados são organizados de forma ascendente e suas ocorrências são contabilizadas:

Tempo médio (X_i)	Frequência (f_i)
1	1
3	2
5	2
6	2
7	1
9	2

Quando por intervalos de classes, os dados também são organizados de forma ascendente, porém, em classes preestabelecidas, e as ocorrências de cada classe são contabilizadas:

Tempo médio (X_i)	Frequência (f_i)
$\mathbf{0 \leq x < 2}$	1
$\mathbf{2 \leq x < 4}$	2
$\mathbf{4 \leq x < 6}$	2
$\mathbf{6 \leq x < 8}$	3
$\mathbf{8 \leq x < 10}$	2

Para dados agrupados e apresentados como diagramas ou tabelas, a definição da média permanece inalterada, mas o método de obtenção difere do usado para dados não agrupados. A seguir, veremos como proceder em cada caso.

3.1 Média para Dados Agrupados por Valor

Dando continuidade ao nosso exemplo, vamos a calcular a média aritmética de dados que estão agrupados por valor. Os dados foram organizados na tabela a seguir:

Tempo médio (X_i)	Frequência (f_i)
1	1
3	2
5	2
6	2
7	1
9	2

Como podemos interpretar essa tabela? Basta você saber que as frequências refletem o número de repetições de cada valor da nossa variável tempo médio. Isto é, um aluno conseguiu responder à questão em 1 minuto, dois alunos conseguiram em 3 minutos, dois alunos conseguiram em 5 minutos, e assim sucessivamente.

Para calcularmos a média a partir de uma tabela de frequências como esta, devemos utilizar a seguinte fórmula:

$$\boldsymbol{\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i \times f_i)}{\sum_{i=1}^{n} f_i}}$$

A aplicação dessa fórmula é bem simples. O raciocínio é exatamente o mesmo adotado para a média ponderada, sendo que, agora, o peso é representado pela frequência. Desse modo, vamos multiplicar cada valor por sua respectiva frequência, somar tudo e dividir pela soma das frequências:

Tempo médio (X_i)	Frequência (f_i)	$X_i \times f_i$
1	1	1 x 1 = 1
3	2	3 x 2 = 6
5	2	5 x 2 = 10
6	2	6 x 2 = 12
7	1	7 x 1 = 7
9	2	9 x 2 = 18

Após isso, somaremos todos os valores da coluna $X_i \times f_i$, obtendo o termo $\sum_{i=1}^{n}(X_i \times f_i)$, e também somaremos os termos da coluna f_i, obtendo o termo $\sum_{i=1}^{n} f_i$. Veja a última linha da tabela:

Tempo médio (X_i)	Frequência (f_i)	$X_i \times f_i$
1	1	1 x 1 = 1
3	2	3 x 2 = 6
5	2	5 x 2 = 10
6	2	6 x 2 = 12
7	1	7 x 1 = 7
9	2	9 x 2 = 18
Total	**10**	**54**

Agora, basta dividirmos um valor pelo outro, obtendo:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i \times f_i)}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{54}{10} = 5{,}4$$

Portanto, a média dos dados apresentados na tabela é 5,4.

(Pref Cananéia/2020) Na tabela, identificam-se informações sobre as notas tiradas por 30 alunos, em uma prova cujas notas variaram de 0,0 a 5,0.

Nota	Quantidade de Alunos
0,0	1
1,0	3
2,0	4
3,0	7
4,0	?
5,0	?

Sabendo que o número de alunos que tirou nota 4,0 foi o dobro do número de alunos que tirou nota 5,0, a média aritmética simples das notas dessa prova foi maior que

a) 3,0 e menor ou igual a 3,1.

b) 3,1 e menor ou igual a 3,2.

c) 3,2 e menor ou igual a 3,3.

d) 3,3 e menor ou igual a 3,4.

e) 3,4 e menor ou igual a 3,5.

Comentários:

Seja x a quantidade de alunos que tirou nota 5,0 e $2x$ a quantidade de alunos tirou nota igual a 4,0. Sabemos que o total de alunos é igual a 30. Portanto, temos:

$$1 + 3 + 4 + 7 + 2x + x = 30$$

$$15 + 3x = 30$$

$$3x = 15$$

$$x = 5\, alunos.$$

Agora, com base nos valores apresentados na tabela, temos que a média das notas é dado por

$$\bar{x} = \frac{0 \times 1 + 1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 7 + 4 \times 2x + 5 \times x}{1 + 3 + 4 + 7 + 2x + x}$$

$$\bar{x} = \frac{0 \times 1 + 1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 7 + 4 \times 10 + 5 \times 5}{1 + 3 + 4 + 7 + 10 + 5}$$

$$\bar{x} = \frac{3 + 8 + 21 + 40 + 25}{30}$$

$$\bar{x} = \frac{97}{30}$$

$$\bar{x} \cong 3{,}23$$

Gabarito: C.

(IPSM-SJC/2018) A tabela mostra grupos de funcionários de uma empresa e os respectivos salários individuais dos componentes de cada grupo.

DISTRIBUIÇÃO SALARIAL POR GRUPO		
GRUPO	NÚMERO DE FUNCIONÁRIOS	SALÁRIO (R$)
A	8	800,00
B	10	1.100,00
C	12	1.200,00

A diferença de salário de cada funcionário do grupo A e a média aritmética ponderada de todos os salários é de aproximadamente

a) 15%

b) 18%

c) 22%

d) 25%

e) 27%

Comentários:

Primeiro, vamos calcular a média aritmética de todos os salários:

Grupo	Salário (x)	Frequência (f)	$x \times f$
A	800	8	6.400
B	1.100	10	11.000
C	1.200	12	14.400
Total		**30**	**31.800**

A média é dada pela divisão entre os dois totais:

$$\bar{x} = \frac{31.800}{30} = \frac{3.180}{3} = 1.060$$

No grupo A, cada funcionário tem salário de R$ 800,00. Portanto, a diferença para a média é:

$$1.060 - 800 = 260$$

Para determinar a diferença percentual, basta dividirmos esse valor pela média:

$$\frac{260}{1.060} \cong 24,52\%$$

Gabarito: D.

(CESPE/FUB/2016) Em um almoxarifado há, em estoque, 100 caixas na forma de paralelepípedos retângulos. Na tabela a seguir são mostrados alguns valores da frequência absoluta, da frequência relativa e da porcentagem da variável, volume interno da caixa, em litros (L).

Volume da caixa (L)	Frequência absoluta	Frequência relativa	Porcentagem (%)
10	10	*	*
20	*	*	*
45	*	0,2	*
60	*	*	40
Total	100	1	100

Considerando essas informações, julgue o seguinte item.

A média aritmética dos volumes dessas caixas é igual a 40 L.

Comentários:

Nessa questão, teremos que calcular a frequência relativa e completar a tabela apresentada. Assim, temos que a frequência relativa é dada pela divisão entre a frequência absoluta e o total de elementos. Iniciaremos completando a tabela pelas linhas que já possuem informações de frequência e porcentagem.

Na primeira linha (Vol. = 10 litros), temos que a frequência absoluta é igual a 10. Como a frequência absoluta total é 100, podemos usar regra de três simples para encontrar a porcentagem (%) e a frequência relativa:

$$f_{abs} - \%$$
$$10 - x$$
$$100 - 100$$

Assim, temos que:

$$x = \frac{100 \times 10}{100} = 10\%$$

Logo, a porcentagem é 10% e a frequência relativa é 0,1.

Na terceira linha (Vol = 45 litros), temos que a frequência relativa é igual a 0,2. Como a frequência relativa total é 1, podemos usar regra de três simples para encontrar a frequência absoluta:

$$f_{abs} - f_{rel}$$

$$y - 0{,}2$$

$$100 - 1{,}0$$

Dessa forma, descobrimos que:

$$y = \frac{100 \times 0{,}2}{1{,}0} = 20$$

Portanto, a frequência absoluta é 20.

O mesmo raciocínio deve ser seguido para a quarta linha da tabela, restando, portanto, apenas a segunda linha. Essa linha será descoberta pelo confronto com a linha totalizadora. Assim, após descobrirmos os valores de todas as células, teremos a seguinte tabela:

Volume da caixa (L)	Frequência absoluta	Frequência relativa	Porcentagem (%)
10	10	0,1	10
20	30	0,3	30
45	20	0,2	20
60	40	0,4	40
Total	100	1	100

Calculando a média:

$$\bar{x} = \frac{10 \times 10 + 20 \times 30 + 45 \times 20 + 60 \times 40}{100}$$

$$\bar{x} = \frac{100 + 600 + 900 + 2.400}{100}$$

$$\bar{x} = \frac{4.000}{100}$$

$$\bar{x} = 40$$

Gabarito: Certo.

(CESPE/PRF/2012)

Q	P (%)
1	50
2	20
3	15
4	10
5	5

A tabela acima mostra a distribuição da quantidade Q de pessoas transportadas, incluindo o condutor, por veículo de passeio circulando em determinado município, obtida como resultado de uma pesquisa feita nesse município para se avaliar o sistema de transporte local. Nessa tabela, P representa a porcentagem dos veículos de passeio circulando no município que transportam Q pessoas, para Q = 1, ..., 5. Com base nessas informações, julgue o seguinte item.

Em média, cada veículo de passeio que circula no referido município transporta duas pessoas. Portanto, se, em determinado momento, houver 10 mil veículos circulando nesse município, a quantidade esperada de pessoas que estão sendo transportadas por todos esses veículos, incluindo-se os condutores, será igual a 20 mil.

Comentários:

Inicialmente, precisamos verificar se a média realmente vale 2. Para isso, basta multiplicarmos a quantidade de pessoas por suas respectivas frequências. Assim, temos:

$$1 \times 0{,}5 = 0{,}5$$

$$2 \times 0{,}2 = 0{,}4$$

$$3 \times 0{,}15 = 0{,}45$$

$$4 \times 0{,}1 = 0{,}4$$

$$5 \times 0{,}05 = 0{,}25$$

Somando todos os resultados:

$$\frac{0{,}5 + 0{,}4 + 0{,}45 + 0{,}4 + 0{,}25}{0{,}5 + 0{,}2 + 0{,}15 + 0{,}1 + 0{,}05} = 2$$

Portanto, a média realmente vale 2.

Assim, basta multiplicarmos a média por 10.000:

$$2 \times 10.000 = 20.000 \; pessoas$$

Gabarito: Certo.

3.2 Média para Dados Agrupados por Classe

Retomando nosso exemplo, vamos calcular a média aritmética de dados que estão agrupados por classe. Os dados foram organizados na tabela a seguir:

Tempo médio (X_i)	Frequência (f_i)
$\mathbf{0 \leq x < 2}$	1
$\mathbf{2 \leq x < 4}$	2
$\mathbf{4 \leq x < 6}$	2
$\mathbf{6 \leq x < 8}$	3
$\mathbf{8 \leq x < 10}$	2

Como podemos interpretar essa tabela? Basta sabermos que as frequências refletem o número de ocorrências em cada um dos intervalos definidos para a variável tempo médio. Isto é, um aluno respondeu à questão com tempo médio abaixo de 2 minutos, dois responderam com tempo médio entre 2 e 4 minutos, dois com tempo médio entre 4 e 6 minutos, e assim sucessivamente.

Ao agruparmos os dados em classes, precisaremos fazer uma modificação em relação ao cálculo anterior: substituir os intervalos pelos seus respectivos pontos médios. Como assim? Ao invés de considerarmos o intervalo de 0 a 2 minutos, por exemplo, substituiremos pelo valor de 1 minuto.

Em nosso exemplo, a identificação dos pontos médios é relativamente fácil. Mas é possível que você encontre situações em que isso não seja tão trivial. Como fazer nesses casos? Devemos calcular a média dos dois extremos do intervalo. Assim, o **ponto médio (PM)** é calculado pela seguinte expressão:

$$\boxed{\boldsymbol{PM = \frac{l_{inf} + l_{sup}}{2}}}$$

em que l_{inf} e l_{sup} são, respectivamente, os limites inferior e superior do intervalo considerado.

Na tabela abaixo, repare que foi incluída uma nova coluna para o cálculo dos pontos médios:

Tempo médio (X_i)	Ponto Médio (PM_i)	Frequência (f_i)
$\mathbf{0 \leq x < 2}$	$(0 + 2)/2 = 1$	1
$\mathbf{2 \leq x < 4}$	$(2 + 4)/2 = 3$	2
$\mathbf{4 \leq x < 6}$	$(4 + 6)/2 = 5$	2
$\mathbf{6 \leq x < 8}$	$(6 + 8)/2 = 7$	3

$\mathbf{8 \leq x < 10}$	$(8+10)/2 = 9$	2

O próximo passo consiste em calcular os valores das multiplicações $PM_i \times f_i$, multiplicando essas duas colunas. Vamos ver:

Tempo médio (X_i)	Ponto Médio (PM_i)	Frequência (f_i)	$PM_i \times f_i$
$\mathbf{0 \leq x < 2}$	1	1	1 x 1 = 1
$\mathbf{2 \leq x < 4}$	3	2	3 x 2 = 6
$\mathbf{4 \leq x < 6}$	5	2	5 x 2 = 10
$\mathbf{6 \leq x < 8}$	7	3	7 x 3 = 21
$\mathbf{8 \leq x < 10}$	9	2	9 x 2 = 18

Após isso, somaremos todos os valores da coluna $PM_i \times f_i$, obtendo o termo $\sum_{i=1}^{n}(PM_i \times f_i)$, e também somaremos os termos da coluna f_i, obtendo o termo $\sum_{i=1}^{n} f_i$. Veja a última linha da tabela:

Tempo médio (X_i)	Ponto Médio (PM_i)	Frequência (f_i)	$PM_i \times f_i$
$\mathbf{0 \leq x < 2}$	1	1	1 x 1 = 1
$\mathbf{2 \leq x < 4}$	3	2	3 x 2 = 6
$\mathbf{4 \leq x < 6}$	5	2	5 x 2 = 10
$\mathbf{6 \leq x < 8}$	7	3	7 x 3 = 21
$\mathbf{8 \leq x < 10}$	9	2	9 x 2 = 18
Total		**10**	**56**

Agora, basta dividirmos um valor pelo outro, obtendo:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(PM_i \times f_i)}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{56}{10} = 5{,}6$$

Finalmente, repare que a média de dados agrupados por classe (5,6) foi diferente da média de dados agrupados por valor (5,4). Por que isso ocorreu? Isso ocorreu porque, ao agruparmos os valores da variável em classes, perdemos detalhes que eram relevantes para o cálculo exato da média, embora a forma de apresentação tenha sido simplificada.

(IFPI/2019) Na tabela abaixo, estão relacionadas as durações das chamadas telefônicas feitas em um dia, em uma empresa.

Duração (em minutos)	Frequência (f_i)
$0 \vdash 2$	90
$2 \vdash 6$	55
$6 \vdash 10$	35
$10 \vdash 15$	20
$15 \vdash 20$	12
$20 \vdash 30$	17
$30 \vdash 40$	5
$40 \vdash 60$	1
Total	**235**

Assim, a duração média das chamadas telefônicas é mais próxima de

a) 6 min e 14 seg.

b) 7 min e 14 seg.

c) 7 min e 23 seg.

d) 7 min e 32 seg.

e) 8 min e 23 seg.

Comentários:

Para dados agrupados em classes, a média aritmética é calculada a partir da média dos pontos centrais de cada classe. Vejamos:

Duração (em minutos)	Ponto Médio (PM_i)	Frequência (f_i)	$PM_i \times f_i$
$0 \vdash 2$	$\frac{0+2}{2} = 1$	90	$1 \times 90 = 90$
$2 \vdash 6$	$\frac{2+6}{2} = 4$	55	$4 \times 55 = 220$
$6 \vdash 10$	$\frac{6+10}{2} = 8$	35	$8 \times 35 = 280$
$10 \vdash 15$	$\frac{10+15}{2} = 12{,}5$	20	$12{,}5 \times 20 = 250$
$15 \vdash 20$	$\frac{15+20}{2} = 17{,}5$	12	$17{,}5 \times 12 = 210$
$20 \vdash 30$	$\frac{20+30}{2} = 25$	17	$25 \times 17 = 425$
$30 \vdash 40$	$\frac{30+40}{2} = 35$	5	$35 \times 5 = 175$
$40 \vdash 60$	$\frac{40+60}{2} = 50$	1	$50 \times 1 = 50$
Total		**235**	**1700**

A média é dada pela divisão entre os dois totais: $\cong 7min14seg$

$$\bar{x} = \frac{1700}{235} \cong 7{,}23\ min$$

Transformando 0,23 minutos em segundos:

$$0{,}23 \times 60seg = 13{,}8seg$$

Portanto, a média em segundos é:

$$\bar{x} = 7min14seg$$

Gabarito: D.

(CESPE/DEPEN/2015)

Idade (x)	Percentual
$18 \leq x < 25$	30%
$25 \leq x < 30$	25%
$30 \leq x < 35$	20%
$35 \leq x < 45$	15%
$45 \leq x < 60$	10%
Total	100%

Felipe M. Monteiro, Gabriela R. Cardoso e Rafael da Silva. A seletividade do sistema prisional brasileiro e as políticas de segurança pública. *In*: XV Congresso Brasileiro de Sociologia, 26 a 29 de julho de 2011. Curitiba (PR). Grupo de Trabalhos - Violência e Sociedade (com adaptações).

A tabela precedente apresenta a distribuição percentual de presos no Brasil por faixa etária em 2010, segundo levantamento feito por Monteiro et al. (2011), indicando que a população prisional brasileira nesse ano era predominantemente jovem. Com base nos dados dessa tabela, julgue os itens a seguir.

A maior parte da população prisional brasileira em 2010 era formada por pessoas com idades inferiores a 30 anos. Porém, a média da distribuição das idades dos presos no Brasil nesse ano foi superior a 30 anos.

Comentários:

A tabela nos permite concluir que a primeira parte do item está correta, pois há 30% + 25% = 55% de pessoas com idades inferiores a 30 anos. Agora, para terminarmos de analisar o item, teremos que calcular a média.

Como os dados estão agrupados em classe, devemos calcular o ponto médio de cada uma das classes:

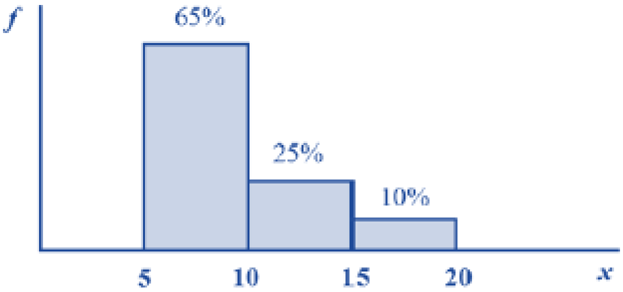
Idade (x)	Percentual (f_i)	Ponto Médio (PM_i)	$PM_i \times f_i$
$\mathbf{18 \leq x < 25}$	30% = 0,30	21,5	6,450
$\mathbf{25 \leq x < 30}$	25% = 0,25	27,5	6,875
$\mathbf{30 \leq x < 35}$	20% = 0,20	32,5	6,500
$\mathbf{35 \leq x < 45}$	15% = 0,15	40,0	6,000
$\mathbf{45 \leq x < 60}$	10% = 0,10	52,5	5,250
	100% = 1,00		**31,075**

Portanto, a média é:

$$\bar{x} = \frac{\sum(PM_i \times f_i)}{\sum f_i} = \frac{31{,}075}{1} = 31{,}075$$

Gabarito: Certo.

(CESPE/STF/2013)



Com referência à figura acima, que mostra a distribuição da renda mensal — x, em quantidades de salários mínimos (sm) — das pessoas que residem em determinada região, julgue o item subsequente.

Considerando a forma de cálculo para dados agrupados, a distribuição da renda mensal x possui média igual a 9,75 sm.

Comentários:

A questão requer o cálculo da média de dados agrupados. Para achar a média precisamos, inicialmente, determinar o ponto médio de cada classe. Teremos:

- de 5 a 10 ponto médio = 7,5;
- de 10 a 15 ponto médio = 12,5;
- de 15 a 20 ponto médio = 17,5.

Agora, a média da amostra é dada pela média ponderada dos pontos médios multiplicados por suas respectivas frequências.

$$\bar{x} = \frac{7{,}5 \times 65\% + 12{,}5 \times 25\% + 17{,}5 \times 10\%}{65\% + 25\% + 10\%}$$

$$\bar{x} = \frac{4{,}875 + 3{,}125 + 1{,}75}{1{,}00}$$

$$\bar{x} = 9{,}75$$

Gabarito: Certo.

4. MÉDIA GEOMÉTRICA

A média geométrica é definida, para o conjunto de números positivos, como a raiz n-ésima do produto de n elementos de um conjunto de dados. A propriedade principal dessa média é preservar o produto dos elementos de um conjunto de dados.

O raciocínio para encontrarmos a fórmula da média geométrica é análogo ao adotado para a média aritmética. Dada uma lista de n números, $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, o produto de seus termos é igual a:

$$\underbrace{x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n}_{n\, fatores}.$$

A média geométrica dessa lista é um número G, tal que, se todos os elementos forem substituídos por G, o produto da lista permanecerá preservado. Assim, substituindo todos os elementos por G, teremos uma nova lista, $\{G, G, \cdots, G\}$, cujo produto é:

$$\underbrace{G \times G \times \cdots \times G}_{n\, fatores} = G^n$$

Como os produtos das duas listas são iguais, temos:

$$G^n = x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n$$

Portanto, temos que:

$$\boxed{\boldsymbol{G = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n}}}$$

Repare que a raiz varia de acordo com a quantidade de elementos da lista de números, isto é, se a lista contém dois números, teremos uma raiz quadrada; se a lista contém três números, teremos uma raiz cúbica.

EXEMPLIFICANDO

Vejamos um exemplo numérico: qual a média geométrica dos números 4, 20 e 100?

Para responder a essa questão, primeiro, calcularemos o produto dos três números e, em seguida, a raiz cúbica dele:

$$G = \sqrt[3]{4 \times 20 \times 100} = \sqrt[3]{8000} = 20$$

Extrair a raiz cúbica de um número, contudo, nem sempre é tão trivial. Na hora da prova, é mais fácil adotarmos o processo de fatoração:

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 100 & 2 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Vocês lembram como fazemos para fatorar um número? Primeiro, dividimos esse número pelo seu menor divisor primo $(2, 3, 5, 7, 11, 13, \cdots)$. Em seguida, dividimos o quociente obtido pelo seu menor divisor primo. Depois, fazemos isso de forma sucessiva até obtermos o valor 1.

Por meio da fatoração, concluímos que:

$$4 = 2 \times 2 = 2^2$$

$$20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$$

$$100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 2^2 \times 5^2$$

Levando essa informação para a fórmula da média geométrica, temos que:

$$G = \sqrt[3]{4 \times 20 \times 100}$$

$$G = \sqrt[3]{(2^2) \times (2^2 \times 5^1) \times (2^2 \times 5^2)}$$

E agora? Vocês lembram como fazemos multiplicação de potências de mesma base? Sim, é isso mesmo, repetiremos as bases e somaremos os expoentes. Assim, $2^2 \times 2^2 \times 2^2 = 2^6$ e $5^1 \times 5^2 = 5^3$. Portanto, ficaremos com:

$$G = \sqrt[3]{2^6 \times 5^3}$$

Agora, por ser uma raiz cúbica, devemos dividir cada um dos expoentes por 3:

$$G = 2^{6/3} \times 5^{3/3}$$

$$G = 2^2 \times 5^1 = 4 \times 5 = 20$$

Portanto, 20 é o valor da média geométrica dos números 4, 20 e 100.

Reparem que o produto dos números da lista é $4 \times 20 \times 100 = 8000$. Se os três números forem substituídos por 20, o produto também será $20 \times 20 \times 20 = 8000$. Por isso, dizemos que a média geométrica preserva o produto dos números.

INDO MAIS FUNDO!

Vejamos algumas situações em que empregamos a média geométrica:

1) no setor financeiro: o preço de um produto, nos últimos 3 meses, sofreu aumentos de, respectivamente, 3%, 8%, 9%. Qual foi o aumento médio percentual nesse período?

$$j = \sqrt[3]{3 \times 8 \times 9}$$

$$j = \sqrt[3]{3 \times 2^3 \times 3^2}$$

$$j = \sqrt[3]{2^3 \times 3^3} = 6\%$$

2) na geometria espacial: um prisma de base retangular possui o mesmo volume que um cubo. Se as dimensões do prisma são 4 cm x 10 cm x 25 cm, qual é o valor do lado do cubo em centímetros?

$$l^3 = 4 \times 10 \times 25$$

$$l = \sqrt[3]{4 \times 10 \times 25}$$

$$l = \sqrt[3]{2^2 \times 2 \times 5 \times 5^2}$$

$$l = \sqrt[3]{2^3 \times 5^3} = 10cm$$

RESUMINDO

Sobre a média geométrica, podemos afirmar que:

I – ela preserva o produto dos elementos de uma lista de números;

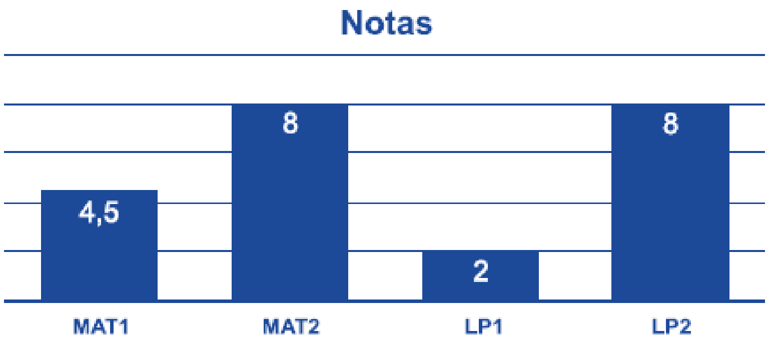
II – ela é obtida por meio da raiz n-ésima do produto de n elementos de um conjunto, $\boldsymbol{G} = \sqrt[n]{\boldsymbol{x_1} \times \boldsymbol{x_2} \times \cdots \times \boldsymbol{x_n}}$.

ESCLARECENDO!

Somente definimos a média geométrica para números não-negativos. Assim, evitamos situações em que a média geométrica não existe. Por exemplo, não conseguiríamos calcular a média geométrica de 1 e -1, pois a raiz quadrada de -1 não existe no campo dos números reais.

HORA DE PRATICAR!

(Pref. de Sertãozinho/2018) O gráfico a seguir mostra as notas das duas provas obtidas por um aluno em matemática e as duas notas obtidas em língua portuguesa, nesse bimestre.



Seus professores afirmaram que, nesse bimestre, a média de matemática e de língua portuguesa será a raiz quadrada do produto de Mat1 x Mat2e a raiz quadrada do produto de LP1 e LP2. Dessa forma, a média de matemática desse aluno será maior que sua média de língua portuguesa em

a) 0,5 ponto.

b) 1,0 ponto.

c) 1,5 ponto.

d) 2,0 pontos.

e) 2,5 pontos.

Comentários:

Do gráfico, extraímos que:

$$\begin{cases} Mat_1 = 4{,}5 \\ Mat_2 = 8{,}0 \end{cases} e \begin{cases} LP_1 = 2{,}0 \\ LP_2 = 8{,}0 \end{cases}.$$

Como a média de matemática será calculada pela raiz quadrada do produto de $Mat_1 \times Mat_2$, então a média desse aluno em matemática será de:

$$\sqrt{Mat_1 \times Mat_2} = \sqrt{4{,}5 \times 8} = \sqrt{36} = 6{,}0\ pontos$$

A média de língua portuguesa, por sua vez, será dada pela raiz quadrada de $LP_1 \times LP_2$. Assim, a média desse aluno em português será de:

$$\sqrt{LP_1 \times LP_2} = \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4{,}0\ pontos$$

Portanto, a média de matemática desse aluno será maior que sua média de língua portuguesa em:

$$6{,}0 - 4{,}0 = 2{,}0\ pontos$$

Gabarito: D.

(Pref. de Pinhais/2017) Sejam a, b, e c três números reais e positivos tais que:

• A média aritmética entre a e b é igual a 15;

• A média aritmética entre b e c é igual a 11;

• A média aritmética entre a e c é igual a 5.

Dessa forma, a média geométrica entre a, b, e c será igual a

a) $3\sqrt[3]{7}$

b) $\sqrt[2]{7}$

c) $7\sqrt[3]{3}$

d) $\sqrt[2]{3}$

e) $\sqrt[2]{189}$

Comentários:

Por definição, a média aritmética é a soma total dos termos dividida pelo número total dos termos.

Pelos dados apresentados, sabemos que:

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2} = 15 \\ \dfrac{b+c}{2} = 11 \\ \dfrac{a+c}{2} = 5 \end{cases}$$

De forma equivalente, temos que:

$$\begin{cases} a+b = 30 \\ b+c = 22 \\ a+c = 10 \end{cases}$$

Temos um sistema de equações lineares formado por três equações e três incógnitas. Para resolvê-lo, podemos utilizar a técnica de substituição de incógnitas. Pela primeira equação, temos que:

$$a = 30 - b$$

Isolando a incógnita c na segunda equação, teremos:

$$c = 22 - b$$

Agora, vamos substituir o valor na terceira equação:

$$a + c = 10$$

$$(30 - b) + (22 - b) = 10$$

$$52 - 2b = 10$$

$$52 - 10 = 2b$$

$$42 = 2b$$

$$b = 21$$

Dessa forma, teremos:

$$a = 30 - b = 30 - 21 = 9$$

$$c = 22 - b = 22 - 21 = 1$$

Logo, ao resolver o sistema, descobrimos que $a = 9$, $b = 21$ e $c = 1$. Assim, sendo a média geométrica a raiz cúbica do produto desses números, então:

$$G = \sqrt[3]{a \times b \times c}$$

$$G = \sqrt[3]{9 \times 21 \times 1}$$

$$G = \sqrt[3]{3^2 \times (3 \times 7) \times 1}$$

$$G = \sqrt[3]{3^3 \times 7}$$

$$G = 3 \times \sqrt[3]{7}$$

Gabarito: A.

5. MÉDIA HARMÔNICA

A média harmônica é definida, para o conjunto de números positivos, como o inverso da média aritmética dos inversos. **A propriedade principal dessa média é preservar a soma dos inversos dos elementos de um conjunto de números**.

O raciocínio para encontrarmos a fórmula da média harmônica é similar ao adotado para as médias aritmética e geométrica. Dada uma lista de n números, $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, a soma dos inversos de seus termos é igual a:

$$\underbrace{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}_{n\ fatores}$$

A média harmônica dessa lista é um número H, tal que, se todos os elementos forem substituídos por H, a soma dos inversos permanecerá preservada. Assim, substituindo todos os elementos por H, teremos uma lista, $\{H, H, \cdots, H\}$, cuja soma dos inversos é:

$$\underbrace{\frac{1}{H} + \frac{1}{H} + \cdots + \frac{1}{H}}_{n\ fatores} = \frac{n}{H}$$

Como as somas dos inversos das duas listas são iguais, temos:

$$\frac{n}{H} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}$$

$$n = H \times \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}}}$$

em que n corresponde à quantidade de termos que integram o conjunto.

Como vimos no início, muitas vezes, **a média harmônica é descrita como o inverso da média aritmética dos inversos**. Isso porque a fórmula acima também pode ser escrita na forma mostrada a seguir, em que $\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)/n$ corresponde à média aritmética dos inversos.

$$H = \frac{\mathbf{1}}{\dfrac{\left(\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x_1}} + \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x_2}} + \cdots + \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x_n}}\right)}{\boldsymbol{n}}}$$

EXEMPLIFICANDO

Vejamos um exemplo numérico. Qual a média harmônica dos números 15 e 60?

Para responder a essa questão, iniciaremos calculando o valor da soma dos inversos desses números:

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{60}$$

Calculando o M.M.C de 15 e 60, temos:

$$\begin{array}{cc|c} 15, & 60 & 2 \\ 15, & 30 & 2 \\ 15, & 15 & 3 \\ 5, & 5 & 5 \\ 1, & 1 & \end{array}$$

$$2^2 \times 3 \times 5 = 60$$

Então, temos que:

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{60} = \frac{4+1}{60} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$$

Agora, por serem somente dois números, devemos dividir a soma dos inversos por 2. Dessa forma encontraremos a média dos inversos:

$$\frac{\left(\frac{1}{12}\right)}{2} = \frac{1}{12} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$$

Desse modo, temos que:

$$H = \frac{1}{\left(\frac{1}{24}\right)} = 1 \times 24 = 24$$

Portanto, 24 é o valor da média harmônica dos números 15 e 60.

Repare que a soma dos inversos dos números da lista é $1/15 + 1/60 = 1/12$. Se os dois números forem substituídos por 24, a soma dos inversos também será $1/24 + 1/24 = 1/12$. Por isso, dizemos que a média harmônica preserva a soma dos inversos dos números.

INDO MAIS FUNDO!

Vejamos algumas situações em que empregamos a média harmônica:

1) no cálculo da velocidade média: durante a metade de um percurso um veículo manteve a velocidade de 80 km/h e durante a metade restante sua velocidade foi de 120 km/h. Qual a velocidade média do veículo durante o percurso?

Primeiro, precisa ficar claro o motivo de adotarmos a média harmônica. Note que as distâncias percorridas são iguais, o que muda é a velocidade e, consequentemente, o tempo. Se aumentarmos a velocidade, o tempo que levaremos para percorrer uma mesma distância diminuirá, logo, essas grandezas são inversamente proporcionais.

$$v_{méd} = \frac{n}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{80} + \frac{1}{120}}$$

Calculando o M.M.C de (80, 120):

$$\begin{array}{cc|c} 80, & 120 & 2 \\ 40, & 60 & 2 \\ 20, & 30 & 2 \\ 10, & 15 & 2 \\ 5, & 15 & 3 \\ 5, & 5 & 5 \\ 1 & 1 & \end{array}$$

$$2^4 \times 5 \times 3 = 240$$

Então, temos que:

$$v_{méd} = \frac{2}{\frac{3+2}{240}} = \frac{2}{\frac{5}{240}}$$

$$v_{méd} = 2 \times \left(\frac{240}{5}\right)$$

$$v_{méd} = \frac{480}{5} = 96\ km/h$$

2) no cálculo da vazão de duas torneiras: para encher um tanque, uma torneira leva 12 horas. Para encher esse mesmo tanque, outra torneira leva 6 horas. Caso as duas torneiras fossem abertas ao mesmo tempo, quanto tempo elas levariam para encher o tanque?

Repare que vazão e tempo são grandezas inversamente proporcionais, pois, quanto maior a vazão da torneira, menor será o tempo que ela levará para encher o tanque. Desse modo, utilizaremos a média harmônica para encontrarmos o tempo médio das duas torneiras.

$$t_{méd} = \frac{2}{\frac{1}{6} + \frac{1}{12}}$$

$$t_{méd} = \frac{2}{\frac{2+1}{12}}$$

$$t_{méd} = \frac{2}{\frac{3}{12}}$$

$$t_{méd} = 2 \times \left(\frac{12}{3}\right)$$

$$t_{méd} = \frac{24}{3} = 8\ horas$$

Como as torneiras serão ligadas simultaneamente em um único tanque, precisamos dividir esse tempo por 2, pois cada torneira leva, em média, 8 horas. Então, concluímos que o tempo de espera com as duas torneiras ligadas seria de 4 horas.

$$8 \div 2 = 4\ horas$$

RESUMINDO

Sobre a média harmônica, podemos afirmar que:

I – ela preserva a soma dos inversos de uma lista de números;

II – ela é definida como o inverso da média aritmética dos inversos, $\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{n}}{\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)}$.

ESCLARECENDO!

Somente definimos a média harmônica para números não-negativos. Assim, evitamos situações em que a média harmônica não existe. Por exemplo, não conseguiríamos calcular a média geométrica de 1 e -1, pois a soma dos inversos resultaria em zero e, como sabemos, a divisão por zero é impossível de ser calculada.

(SEFAZ-GO/2018) Os matemáticos definem diferentes tipos de médias entre dois números positivos e, para cada aplicação, escolhem qual o tipo mais adequado a ser utilizado. A média harmônica H entre os números positivos a e b, por exemplo, é definida como o inverso da média aritmética dos inversos desses números, ou seja,

$$\boldsymbol{H = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}}}$$

A média aritmética dos números 5 e 20 supera a média harmônica desses mesmos números em

a) 4,75 unidades.

b) 5 unidades.

c) 4 unidades.

d) 4,25 unidades.

e) 4,5 unidades.

Comentários:

A média aritmética é dada por:

$$\frac{5+20}{2} = 12{,}5$$

A média harmônica é o inverso da média aritmética dos inversos. O primeiro passo é calcularmos a soma dos inversos:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{20} = \frac{4+1}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

Assim, podemos calcular a média aritmética dos inversos. Para isso, basta dividirmos a soma dos termos por 2:

$$\frac{\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{4}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Portanto, a média aritmética supera a média harmônica em $12{,}5 - 8 = 4{,}5$ unidades.

Também, podemos calcular a média harmônica de dois números de forma mais rápida. Para tanto, basta desenvolvermos a própria fórmula que foi dada na questão:

$$H = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}}$$

$$H = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

$$H = \frac{2}{\frac{a+b}{a \times b}}$$

$$H = \frac{2 \times a \times b}{a+b}$$

Assim, a média harmônica de dois números é o quociente do dobro do produto dos números pela soma dos números. Voltando ao enunciado, queremos calcular a média harmônica dos números 5 e 20, logo:

$$H = \frac{2 \times 5 \times 20}{5+20} = \frac{200}{25} = 8$$

Gabarito: E.

(ARTESP/2017) Considere as seguintes informações

I. (A) = média harmônica dos números 4, 6 e 12.

II. (B) = média geométrica dos números 4, 6 e 12.

A média aritmética entre (A) e (B) é igual a

a) 6,81.

b) 5,68.

c) 6,30.

d) 5,41.

e) 6,93.

Comentários:

A média geométrica é:

$$G = \sqrt[3]{4 \times 6 \times 12}$$

$$G = \sqrt[3]{2^2 \times 2 \times 3 \times 2^2 \times 3}$$

$$G = 2 \times \sqrt[3]{36}$$

Agora, a nossa dificuldade será encontrar a raiz cúbica de 36. Sabemos que $3^3 = 27$ e que $4^3 = 64$. Portanto, o número que procuramos está entre 3 e 4. E deve ser ligeiramente maior que 3. Vamos aproximar uma só casa, testando valores:

$$3{,}1^3 = 29{,}791$$

$$3{,}2^3 = 32{,}768$$

$$3{,}3^3 = 35{,}937$$

Portanto, já chegamos bem próximo do valor que queríamos (36). Assim, vamos considerar a raiz cúbica de 36 aproximadamente igual a 3,3.

$$G = 2 \times \sqrt[3]{36}$$

$$G = 2 \times 3{,}3$$

$$G = 6{,}6$$

A média harmônica é

$$H = \frac{1}{\frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}}{3}}$$

Vamos calcular, em primeiro lugar, a soma dos inversos:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3 + 2 + 1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Agora, vamos calcular o valor médio da soma dos inversos:

$$\frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}}{3} = \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Finalmente, vamos encontrar o inverso da média da média aritmética dos inversos:

$$H = \frac{1}{\frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 1 \times 6 = 6$$

$$H = 6$$

Agora, vamos descobrir o valor da média aritmética entre G e H:

$$\frac{6{,}6 + 6}{2} = 6{,}3$$

Gabarito: C.

6. Desigualdade das Médias

Dada uma lista de n números positivos, $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, podemos afirmar que:

$$\boxed{\bar{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{G} \geq \boldsymbol{H}}$$

em que $\bar{x}$ é a média aritmética; G é a média geométrica e H é a média harmônica.

Significa dizer que a média aritmética será sempre maior ou igual a média geométrica que, por seu turno, será sempre maior ou igual a harmônica. A igualdade ocorrerá quando os números da lista forem todos iguais.

Tomemos como exemplo os números 4, 12 e 20. Como sabemos, a média aritmética será:

$$\bar{x} = \frac{4 + 12 + 20}{3} = 12$$

A média geométrica será:

$$G = \sqrt[3]{4 \times 12 \times 20} \cong 9{,}86$$

E a média harmônica será:

$$H = \frac{3}{\frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}} \cong 2{,}61$$

Obtivemos, portanto, uma média aritmética ($\bar{x} = 12$) maior que a média geométrica ($G = 9{,}86$) que, por sua vez, é maior que a média harmônica ($H = 2{,}61$).

Agora, analisaremos um caso em que as três médias são iguais: considere uma lista composta pelos números 5, 5 e 5. Nesse caso, temos que $\bar{x}$, G e H são, respectivamente:

$$\bar{x} = \frac{5 + 5 + 5}{3} = 5$$

$$G = \sqrt[3]{5 \times 5 \times 5} = 5$$

$$H = \frac{3}{\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}} = 5$$

Portanto, quando todos os números da lista são iguais, as médias aritmética ($\bar{x}$), geométrica (G) e harmônica (H) também são iguais.

(CESPE/SEFAZ-RS/2018) Para a, b e c, números reais, positivos e distintos, são verdadeiras as seguintes propriedades:

- $\boldsymbol{a < c}$
- $\boldsymbol{b < \frac{a+c}{2} < \sqrt{bc}}$

A partir dessas propriedades, é correto concluir que

a) $\frac{a+c}{2} < \frac{a+b+c}{3}$

b) $a > b$

c) $c < \frac{a+b}{2}$

d) $a < b < c$

e) $b > c$

Comentários:

Essa questão pode ser respondida de duas formas numericamente, por meio da atribuição de valores às variáveis, ou algebricamente, por meio da manipulação das variáveis.

Primeiro, vamos resolver de forma numérica. Para isso, devemos considerar que, para a, b e c, números reais positivos e distintos, são verdadeiras as seguintes propriedades:

$$a < c$$

$$b < \frac{a+c}{2} < \sqrt{bc}$$

Como temos $\sqrt{bc}$, podemos atribuir valores às variáveis b e c, tais como $b = 9$ e $c = 16$, de forma que a raiz resulte em um número inteiro. Dessa forma, $\sqrt{bc} = \sqrt{9 \times 16} = \sqrt{144} = 12$. Assim, temos que:

$$a < c$$

$$a < 16$$

Temos ainda que:

$$b < \frac{a+c}{2} < \sqrt{bc}$$

$$9 < \frac{a+16}{2} < 12$$

Vamos multiplicar todos os termos por 2.

$$18 < a + 16 < 24$$

Nesse ponto, devemos subtrair 16 de todos os termos.

$$18 - 16 < a < 24 - 16$$
$$2 < a < 8$$

Portanto, a pode ser qualquer valor nesse intervalo. Vamos supor que $a = 4$. Assim, vamos assumir que $a = 4$, $b = 9$ e $c = 16$. Agora, podemos partir para a análise das alternativas:

a) $\boldsymbol{\frac{a+c}{2} < \frac{a+b+c}{3}}$

$$\frac{4+16}{2} < \frac{4+9+16}{3}$$
$$10 < 9{,}666\ (falso)$$

b) $a > b$

$$4 > 9\ (falso)$$

c) $c < \frac{a+b}{2}$

$$16 < \frac{4+9}{2}$$
$$16 < 6{,}5\ (falso)$$

d) $a < b < c$

$$4 < 9 < 16\ (verdadeiro)$$

e) $b > c$

$$9 > 16\ (falso)$$

Agora, vamos usar o método algébrico para responder à questão. Retomando o que diz o enunciado, temos que, para a, b e c, números reais positivos e distintos, são verdadeiras as seguintes propriedades:

$$a < c$$
$$b < \frac{a+c}{2} < \sqrt{bc}$$

Assim, já sabemos que $a < c$.

A segunda desigualdade nos diz que $b < \sqrt{bc}$. Em outras palavras, b é menor que a média geométrica entre b e c. Como a **média geométrica** sempre fica entre os números, podemos concluir que $b < c$. Podemos verificar isso da seguinte forma:

$$b^2 < bc$$
$$b < c$$

Precisamos, agora, saber a relação entre a e b.

A segunda desigualdade informou que $\frac{a+c}{2} < \sqrt{bc}$. O lado esquerdo representa a **média aritmética** entre os números a e c. Sabemos que a **média aritmética** é sempre maior que a média geométrica. Portanto,

$$\sqrt{ac} < \frac{a+c}{2}$$

Logo,

$$\sqrt{ac} < \frac{a+c}{2} < \sqrt{bc}$$

Agora, sabemos que:

$$\sqrt{ac} < \sqrt{bc}$$

$$ac < bc$$

$$a < b$$

Assim, temos que $a < b$ e $b < c$. Portanto, $a < b < c$. A resposta está na alternativa D, mas analisaremos as demais alternativas.

a) $\boldsymbol{\frac{a+c}{2} < \frac{a+b+c}{3}}$

Sabemos que $b < a + c$, isto é, b é menor que a média entre a e c. Assim, se formos incluir no cálculo da média, o resultado dessa média diminuirá. Logo, a alternativa A está errada.

b) $a > b$

Falso, pois concluímos que $a < b$.

c) $c < \frac{a+b}{2}$

Falso, pois c é o maior valor. Logo, também será maior que a média dos dois menores.

d) $a < b < c$

Alternativa correta

e) $b > c$

Falso, pois $b < c$.

Assim, comprovamos que a resposta correta é a alternativa D.

Gabarito: D.

QUESTÕES COMENTADAS

1. (CESPE/SEFAZ-DF/2020) A partir de uma amostra aleatória simples de tamanho n, sabe-se que a média aritmética de uma variável X foi igual a 3. Considerando que os valores possíveis para a variável X sejam -1 e +4, julgue o item que se segue.

Nessa amostra aleatória, a quantidade de observações iguais a +4 foi igual a 0,8 n.

Comentários:

Nessa questão, precisamos descobrir as frequências relativas de (-1) e (+4).

Para isso, vamos adotar que o valor +4 tem frequência relativa igual a $fr(+4) = p$. Também poderíamos adotar $fr(-1) = p$, apenas fazendo alguns pequenos ajustes na metodologia de cálculo.

Como a amostra é composta apenas por valores -1 e +4, podemos concluir que a soma das frequências relativas desses dois valores deve corresponder a 100%. Logo, temos:

$$fr(-1) + fr(+4) = 1$$

$$fr(-1) = 1 - p$$

A média aritmética é dada pela soma da multiplicação de cada valor por sua respectiva frequência, assim:

$$\bar{x} = \frac{4 \times p + (-1) \times (1 - p)}{p + (1 - p)} = \frac{4 \times p + (-1) \times (1 - p)}{1} = 4 \times p + (-1) \times (1 - p)$$

O enunciado diz que a média vale 3, portanto:

$$3 = 4 \times p + (-1) \times (1 - p)$$

Aplicando a propriedade distributiva, temos que:

$$3 = 4p - 1 + p$$

Isolando as constantes dos valores em função de p, temos:

$$3 + 1 = 4p + p$$

$$4 = 5p$$

$$p = \frac{4}{5}$$

$$p = 0{,}8$$

Concluímos que 80% das observações foram iguais a +4

Gabarito: Certo.

2. (CESPE/UNCISAL/2019) A tabela a seguir apresenta a inflação anual no Brasil no triênio 2016–2018, segundo dados do IBGE.

Ano	Inflação (%)
2016	6,3

2017	2,9
2018	3,7

Considerando-se as informações precedentes, um produto que custava R$ 1.000,00 em dezembro de 2018 e que tenha sido reajustado em janeiro de 2019 pela média aritmética da inflação do triênio 2016–2018 passou a custar, após o reajuste,

a) R$ 1.029,00.

b) R$ 1.037,00.

c) R$ 1.043,00.

d) R$ 1.172,00.

e) R$ 1.133,00.

Comentários:

Inicialmente, vamos calcular a média aritmética da inflação para os três anos:

$$\bar{x} = \frac{6{,}3\% + 2{,}9\% + 3{,}7\%}{3}$$

$$\bar{x} = \frac{12{,}9\%}{3}$$

$$\bar{x} = 4{,}3\%$$

Agora, basta multiplicarmos o valor do produto (R$ 1.000,00) pelo índice de reajuste do triênio 2016-2018:

$$\textit{Índice de Reajuste} = 1 + 4{,}3\% = 1{,}043$$

$$1.000 \times 1{,}043 = 1043$$

Assim, o produto que custava R$ 1.000,00 em dezembro de 2018, passará a custar R$ 1.043,00 em janeiro de 2019.

Gabarito: C.

3. (CESPE/UNCISAL/2019) A crise mundial tem contribuído para o aumento da entrada de estrangeiros no Brasil. A maior parte vem de países vizinhos, a exemplo do Paraguai. A tabela a seguir apresenta, de acordo com dados do Ministério da Justiça, a quantidade de paraguaios que vieram para o Brasil nos anos de 2009, 2011 e 2012.

Ano	Paraguaios
2009	11000
2010	?
2011	19000

2012	27300

Disponível em: http://reporterbrasil.org.br. Acesso em: 9 nov. 2018 (adaptado).

Se a média anual de imigrantes paraguaios para o Brasil, no período de 2009 a 2012, foi de 17 600, então, quantos paraguaios imigraram para o Brasil em 2010?

a) 13 100

b) 14 325

c) 15 000

d) 15 840

e) 17 600

Comentários:

A questão informa que a média anual de imigrantes paraguaios no Brasil, no período de 2009 a 2012, foi de 17.600. Como sabemos, a média é dada pela soma dos dados dividida pelo número de observações. Então, se considerarmos que o número de imigrantes em 2010 foi x, teremos:

$$\bar{x} = \frac{11000 + x + 19000 + 27300}{4}$$

$$17600 = \frac{57300 + x}{4}$$

$$4 \times 17600 = 57300 + x$$

$$70400 = 57300 + x$$

$$x = 70400 - 57300$$

$$x = 13.100$$

Gabarito: A.

4. (CESPE/Pref. São Cristóvão/2019) Segundo o IBGE, a massa da renda média mensal real domiciliar per capita em 2016 foi de aproximadamente R$ 264 bilhões; a população brasileira nesse ano era de aproximadamente 190 milhões de pessoas.

A partir dessas informações, julgue o item a seguir.

A renda média mensal dos brasileiros em 2016 foi superior a R$ 1.300.

Comentários:

Conforme o enunciado, a renda domiciliar per capita em 2016 foi de aproximadamente 264 bilhões de reais e a população brasileira nesse ano era de 190 milhões de pessoas.

Como sabemos, a média aritmética é definida pelo quociente entre a soma dos valores de um determinado conjunto de medidas e o número de valores nele existentes. Então, a renda média dos brasileiros é:

$$\bar{x} = \frac{264.000.000.000}{190.000.000}$$

$$\bar{x} = \frac{26.400}{19}$$

$$\bar{x} \cong 1.389{,}5 \; reais$$

Gabarito: Certo.

5. (CESPE/Pref. São Cristóvão/2019) Segundo o IBGE, a massa da renda média mensal real domiciliar per capita em 2016 foi de aproximadamente R$ 264 bilhões; a população brasileira nesse ano era de aproximadamente 190 milhões de pessoas.

A partir dessas informações, julgue o item a seguir.

O gráfico a seguir mostra que, em 2016, mais de 40% da massa de renda mensal real domiciliar per capita coube a 10% da população; ao restante coube menos de 60% dessa massa de renda. A partir do gráfico, é correto inferir que, naquele ano, em média, a renda mensal desses 10% da população era superior a R$ 10.000.

Comentários:

De acordo com o enunciado, a população é de 190 milhões de pessoas. O percentual de 10% da população corresponde a 19 milhões de pessoas.

A renda domiciliar per capita em 2016 foi de aproximadamente 264 bilhões de reais. O percentual de 43,4% desse valor equivale a:

$$43{,}4\% \; de \; R\$ \; 264 \; bilhões = R\$ \; 114{,}6 \; bilhões$$

Assim, a média da renda mensal desses 10% da população será de:

$$\bar{x} = \frac{114{,}6 \; bilhões}{19 \; milhões} = \frac{114.600.000.000}{19.000.000} \cong R\$ \; 6.031.$$

Gabarito: Errado.

6. (CESPE/ABIN/2018)

	Evolução da quantidade de docentes por etapa de ensino Brasil 2013 - 2017			
Ano	Educação infantil	Anos iniciais do ensino fundamental	Anos finais do ensino fundamental	Ensino médio
2013	478.811	750.366	802.902	507.617
2014	502.445	757.950	797.577	522.426
2015	518.308	758.840	786.140	522.826
2016	540.567	763.927	778.561	519.883
2017	557.541	761.737	764.731	509.814
Soma total das quantidades de docentes no período	2.597.672	3.792.820	3.929.911	2.582.566

Com base nos dados da tabela anterior, extraídos do Relatório das Notas Estatísticas do Censo Escolar de 2017, do INEP, julgue os itens a seguir.

A média do quantitativo de docentes do ensino médio entre os anos de 2013 e 2017 foi superior à média do quantitativo de docentes da educação infantil para o mesmo período.

Comentários:

No período em análise, o total de docentes do ensino médio foi de 2.582.566. Logo, a média anual é de:

$$\bar{x}_{EM} = \frac{2.582.566}{5} = 516.513{,}2$$

Por seu turno, o total de docentes da educação infantil foi de 2.597.672. Assim, a média anual é de:

$$\bar{x}_{EI} = \frac{2.597.672}{5} = 519.534{,}4$$

Portanto, $\bar{x}_{EM} < \bar{x}_{EI}$.

Gabarito: Errado.

7. (CESPE/BNB/2018) Em uma faculdade, para avaliar o aprendizado dos alunos em determinada disciplina, o professor aplica as provas A, B e C e a nota final do aluno é a média ponderada das notas obtidas em cada prova. Na prova A, o peso é1; na prova B, o peso é 10% maior que o peso na prova A; na prova C, o peso é20% maior que o peso na prova B.

Nesse caso, se P_A, P_B, P_C forem as notas obtidas por um aluno nas provas A, B e C, respectivamente, então a nota final desse aluno é expressa por $\frac{P_A+1{,}2\times P_B+1{,}32\times P_C}{3{,}52}$

Comentários:

O enunciado informou que o peso da prova A é 1. Além disso, foi dito que o peso da prova B é 10% maior que o peso da prova A. Portanto, o peso da prova B será:

$$1{,}00 \times (100\% + 10\%) = 1{,}00 \times 110\% = 1{,}00 \times 1{,}10 = 1{,}10$$

O peso da prova C é 20% maior que o preso da prova B. Portanto, o peso da prova C será:

$$1{,}10 \times (100\% + 20\%) = 1{,}10 \times 120\% = 1{,}10 \times 1{,}20 = 1{,}32$$

Para calcular a média ponderada, devemos multiplicar cada nota pelo seu respectivo peso e dividir o resultado pela soma dos pesos:

$$\bar{x} = \frac{1 \times P_A + 1{,}10 \times P_B + 1{,}32 \times P_C}{1 + 1{,}10 + 1{,}32}$$

$$\bar{x} = \frac{P_A + 1{,}10 \times P_B + 1{,}32 \times P_C}{3{,}42}$$

Gabarito: Errado.

8. (CESPE/SEE-DF/2017) Iniciado em 2007, o processo gradativo de substituição do sinal de TV analógico pelo digital no Brasil começou a concretizar-se em 2016. Nesse período, intensificou-se o uso da TV por assinatura, segundo dados do IBGE. A tabela a seguir mostra o percentual aproximado de domicílios brasileiros que dispunham de diferentes modalidades de acesso a TV em 2014.

Zona	Sinal digital de TV aberta	TV por assinatura	antena parabólica
Urbana	44%	36%	32%
Rural	16%	8%	79%

IBGE (com adaptações).

Considerando essas informações e o fato de que, em 2014, 86% dos domicílios brasileiros situavam-se na zona urbana, julgue os itens subsequentes.

Em 2014, havia acesso ao sinal digital de TV aberta em mais de 50% dos domicílios brasileiros.

Comentários:

Conforme o enunciado, a zona urbana comporta 86% dos municípios brasileiros, dos quais 44% têm sinal digital de TV aberta. Por sua vez, a zona rural comporta 14% dos municípios brasileiros, dos quais 16% têm sinal digital de TV aberta. Assim, a média geral será uma média ponderada pelos percentuais de municípios em cada área:

$$\bar{x} = \frac{44\% \times 86\% + 16\% \times 14\%}{86\% + 14\%}$$

$$\bar{x} = \frac{44\% \times 86 + 16\% \times 14}{100}$$

$$\bar{x} = \frac{4.008\%}{100} = 40{,}08\%$$

Gabarito: Errado.

9. (CESPE/PM-AL/2017) Em um tanque A, há uma mistura homogênea de 240 L de gasolina e 60 L de álcool; em outro tanque B, 150 L de gasolina estão misturados homogeneamente com 50 L de álcool. A respeito dessas misturas, julgue os itens subsequentes.

Considere que em um tanque C, inicialmente vazio, tenham sido despejadas certas quantidades das misturas dos tanques A e B totalizando 100 L. Considere também que, depois de homogeneizada essa mistura no tanque C, a separação de álcool e gasolina por um processo químico tenha mostrado que nesses 100 L, 22 L eram de álcool. Nessa situação, para formar essa mistura no tanque C foram usados mais de 55 L da mistura do tanque A.

Comentários:

De acordo com os dados da questão, temos que:

- o tanque A possui 240 + 60 = 300 litros. Logo, o álcool representa 60/300 = 1/5 = 0,20 = 20% da mistura;
- o tanque B possui 150 + 50 = 200 litros. Logo, o álcool representa 50/200 = 1/4 = 0,25 = 25% da mistura; e
- o tanque C possui 22/100 = 22% de álcool.

Além disso, a questão informou que foram despejadas no tanque C certas quantidades das misturas dos tanques A e B. Assim, o percentual de álcool em C é uma média ponderada dos percentuais de álcool nos demais tanques. O que precisamos calcular são, justamente, os pesos de ponderação.

Consideraremos A o percentual do tanque C que foi retirado do tanque A; e B o percentual do tanque C que foi retirado do tanque B. Sabemos que $A + B = 100\% = 1$. Portanto, $B = 1 - A$.

$$22\% = \frac{20\% \times A + 25\% \times B}{A + B}$$

$$22\% = \frac{20\% \times A + 25\% \times B}{1}$$

$$22\% = 20\% \times A + 25\% \times B$$

Substituindo B por $(1 - A)$, temos:

$$22 = 20 \times A + 25 \times (1 - A)$$

$$22 = 20 \times A + 25 - 25 \times A$$

$$5 \times A = 3$$

$$A = \frac{3}{5} = 0{,}60 = 60\%$$

Logo, descobrimos que 60% do volume de C foi retirado do tanque A. Como o tanque C possuía 100 litros, então 60 litros de C vieram do tanque A.

Gabarito: Certo.

10. (CESPE/FUNPRESP/2016)

Adesão ao plano	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0
Salário (em R$)	5.000	8.000	4.000	6.000	2.000	3.000	4.000	4.000	4.500	7.000

Considerando que os dados na tabela mostram salários de diferentes servidores que aderiram ou não aderiram (0) a determinado plano de previdência complementar, julgue o item subsecutivo.

A média dos salários do grupo que aderiu ao plano de previdência complementar é menor que a do que não aderiu ao plano.

Comentários:

De acordo com o enunciado, os servidores que aderiram ao plano estão indicados pelo número 1 e os servidores que não aderiram estão indicados pelo número 0.

Para calcularmos a média, somaremos os elementos pertencentes a cada grupo e dividiremos o resultado pela quantidade de elementos de cada grupo. Assim, os salários dos cinco servidores que aderiram ao plano são: 5.000, 8.000, 6.000, 4.000, 4.500. Logo, a média de seus salários é:

$$\overline{x_1} = \frac{5.000 + 8.000 + 6.000 + 4.000 + 4.500}{5} = \frac{27.500}{5} = 5.500$$

Por sua vez, os salários dos cinco servidores que não aderiram ao plano são: 4.000, 2.000, 3.000, 4.000, 7.000. Assim, a média de seus salários é:

$$\overline{x_2} = \frac{4.000 + 2.000 + 3.000 + 4.000 + 7.000}{5} = \frac{20.000}{5} = 4.000$$

Portanto, a média dos salários dos servidores que aderiram ao plano é maior do que a média dos salários dos servidores que não aderiram ao plano.

Gabarito: Errado.

11. (CESPE/TELEBRAS/2015) A equipe de atendentes de um serviço de telemarketing é constituída por 30 empregados, divididos em 3 grupos, que trabalham de acordo com a seguinte escala.

Grupo I: 7 homens e 3 mulheres, que trabalham das 6 h às 12 h.

Grupo II: 4 homens e 6 mulheres, que trabalham das 9 h às 15 h.

Grupo III: 1 homem e 9 mulheres, que trabalham das 12 h às 18 h. A respeito dessa equipe, julgue o item que se segue.

Se, nesse serviço de telemarketing, a média das idades das atendentes for de 21 anos e a média das idades dos atendentes for de 31 anos, então a média das idades de todos os 30 atendentes será de 26 anos.

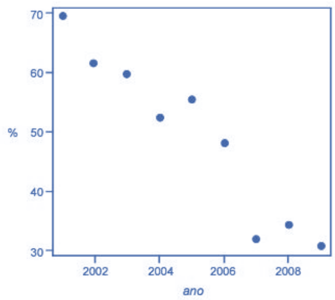
Comentários:

Segundo o enunciado, a quantidade de homens é $\bar{h} = 7 + 4 + 1 = 12$ e a quantidade de mulheres é $\bar{m} = 3 + 6 + 9 = 18$. A média geral é a média ponderada das médias de idade de homens e mulheres, em que os pesos são as quantidades de homens e mulheres. Então, multiplicaremos a média de idade dos homens pela quantidade de homens, a média de idade das mulheres pela quantidade de mulheres, somaremos tudo e dividiremos pela quantidade total de pessoas.

$$\bar{x} = \frac{\bar{h} \times 12 + \bar{m} \times 18}{12 + 18} = \frac{31 \times 12 + 21 \times 18}{30} = \frac{750}{30} = 25$$

Gabarito: Errado.

12. (CESPE/DEPEN/2015)



Dado que a participação dos presidiários em cursos de qualificação profissional é um aspecto importante para a reintegração do egresso do sistema prisional à sociedade, foram realizados levantamentos estatísticos, nos anos de 2001 a 2009, a respeito do valor da educação e do trabalho em ambientes prisionais. Cada um desses levantamentos, cujos resultados são apresentados no gráfico, produziu uma estimativa anual do percentual P de indivíduos que participaram de um curso de qualificação profissional de curta duração, mas que não receberam o diploma por motivos diversos. Em 2001, 69,4% dos presidiários que participaram de um curso de qualificação profissional não receberam o diploma. No ano seguinte, 2002, esse percentual foi reduzido para 61,5%, caindo, em 2009, para 30,9%.

A partir das informações e do gráfico apresentados, julgue os itens que se seguem.

Caso a quantidade total de presidiários participantes de um curso de qualificação profissional em 2001 seja igual a N, e esse total em 2002 seja igual a 2N, a estimativa do percentual P de indivíduos que participaram de um curso de qualificação profissional de curta duração e que não receberam o diploma por motivos diversos nos anos de 2001 e 2002 é inferior a 65%.

Comentários:

Podemos resumir os dados do problema por meio da seguinte tabela:

Ano	Percentual de presidiários que participaram do curso e não receberam o diploma (x_i)	Nº de presidiários participantes do curso (f_i)
2001	69,4%	N
2002	61,5%	2N

Para calcular a média, multiplicaremos cada valor pela sua respectiva frequência, somaremos tudo e dividiremos pela frequência total.

$$\bar{x} = \frac{69{,}4\% \times N + 61{,}5\% \times 2N}{N + 2N}$$

$$\bar{x} = \frac{69{,}4\% \times N + 123\% \times N}{3N}$$

$$\bar{x} = \frac{192{,}4\% \times N}{3N} = \frac{192{,}4\%}{3} \cong 64{,}13\%$$

Gabarito: Certo.

13. (CESPE/DEPEN/2015)

Idade (x)	Percentual
$18 \leq x < 25$	30%
$25 \leq x < 30$	25%
$30 \leq x < 35$	20%
$35 \leq x < 45$	15%
$45 \leq x < 60$	10%
Total	100%

Felipe M. Monteiro, Gabriela R. Cardoso e Rafael da Silva. **A seletividade do sistema prisional brasileiro e as políticas de segurança pública**. *In*: XV Congresso Brasileiro de Sociologia, 26 a 29 de julho de 2011. Curitiba (PR). Grupo de Trabalhos - Violência e Sociedade (com adaptações).

A tabela precedente apresenta a distribuição percentual de presos no Brasil por faixa etária em 2010, segundo levantamento feito por Monteiro et al. (2011), indicando que a população prisional brasileira nesse ano era predominantemente jovem. Com base nos dados dessa tabela, julgue os itens a seguir.

A maior parte da população prisional brasileira em 2010 era formada por pessoas com idades inferiores a 30 anos. Porém, a média da distribuição das idades dos presos no Brasil nesse ano foi superior a 30 anos.

Comentários:

A tabela nos permite concluir que a primeira parte do item está correta, pois há 30% + 25% = 55% de pessoas com idades inferiores a 30 anos. Agora, para terminarmos de analisar o item, teremos que calcular a média.

Como vimos, como os dados estão agrupados em classe, devemos calcular o ponto médio de cada uma das classes:

Idade (x)	Percentual (f_i)	Ponto Médio (PM_i)	$PM_i \times f_i$
$18 \leq x < 25$	30% = 0,30	21,5	6,450
$25 \leq x < 30$	25% = 0,25	27,5	6,875
$30 \leq x < 35$	20% = 0,20	32,5	6,500
$35 \leq x < 45$	15% = 0,15	40,0	6,000
$45 \leq x < 60$	10% = 0,10	52,5	5,250
	100% = 1,00		**31,075**

Portanto, a média é:

$$\bar{x} = \frac{\sum(PM_i \times f_i)}{\sum f_i} = \frac{31{,}075}{1} = 31{,}075$$

Gabarito: Certo.

14. (CESPE/CNJ/2013) Um estagiário deve organizar uma pilha de n processos de acordo com o valor, em reais, das sentenças e por número, em três estantes: I, II e III. O desvio padrão do valor das sentenças é R$ 50. A estante I é para processos referentes a sentenças com valores inferiores a R$ 500; a II, para processos com sentenças de valores entre R$ 500 e R$ 2.000 e a III, para processos com sentenças de valores acima de R$ 2.000.

A respeito dessa organização de processos, julgue o item a seguir.

Considerando que, em média, os processos na estante I tenham 100 páginas, os da estante II, 150 páginas e os da estante III, 300 páginas, e que as probabilidades de um processo pertencer às estantes I, II ou III sejam iguais a 4/5, 3/20 e 5/100, respectivamente, então a quantidade média de páginas de um processo será superior a 130.

Comentários:

O enunciado informou que as probabilidades de um processo pertencer às estantes I, II ou III são iguais a 4/5, 3/20 e 5/100, respectivamente.

Então, precisamos encontrar um denominador comum para essas frações, para que possamos comparar quantos processos temos em cada estante, com base em uma mesma proporção. Teremos:

$$\frac{4}{5};\frac{3}{20};\frac{5}{100} \Rightarrow \frac{16}{20};\frac{3}{20};\frac{1}{20}$$

Assim, para cada 20 processos, teremos a seguinte distribuição: 16 estarão na estante I, 3 estarão na estante II e 1 estará na estante III.

Portanto, basta multiplicarmos a quantidade de processos de cada estante pelo número de páginas das respectivas estantes.

Estante I: 100 páginas → $16 \times 100 = 1.600$

Estante II: 150 páginas → $3 \times 150 = 450$

Estante III: 300 páginas → $1 \times 300 = 300$

Já temos o total de páginas de cada estante, portanto, basta somarmos tudo e dividirmos pelo número de processos. Dessa forma, temos a seguinte média:

$$\bar{x} = \frac{1.600 + 450 + 300}{20}$$

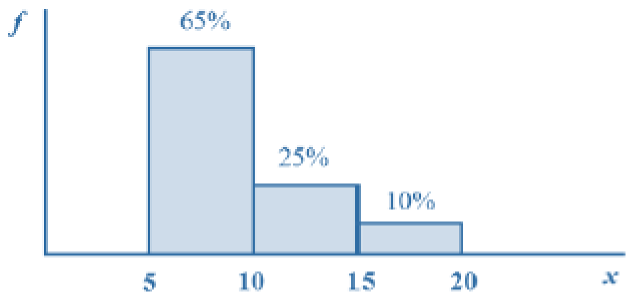
$$\bar{x} = \frac{2.350}{20}$$

$$\bar{x} = 117{,}5$$

Assim, a quantidade média de páginas de um processo é inferior a 130.

Gabarito: Errado.

15. (CESPE/STF/2013)



Com referência à figura acima, que mostra a distribuição da renda mensal — x, em quantidades de salários mínimos (sm) — das pessoas que residem em determinada região, julgue o item subsequente.

Considerando a forma de cálculo para dados agrupados, a distribuição da renda mensal x possui média igual a 9,75 sm.

Comentários:

A questão requer o cálculo da média de dados agrupados. Para achar a média precisamos, inicialmente, determinar o ponto médio de cada classe. Teremos:

- de 5 a 10 ponto médio = 7,5;

- de 10 a 15 ponto médio = 12,5;
- de 15 a 20 ponto médio = 17,5.

Agora, a média da amostra é dada pela média ponderada dos pontos médios multiplicados por suas respectivas frequências.

$$\bar{x} = \frac{7,5 \times 65\% + 12,5 \times 25\% + 17,5 \times 10\%}{65\% + 25\% + 10\%}$$

$$\bar{x} = \frac{4,875 + 3,125 + 1,75}{1,00}$$

$$\bar{x} = 9,75$$

Gabarito: Certo.

16. (CESPE/TCE-RS/2012) Uma instituição possui 15 empregados: 2 da referência A, 4 da B e 9 da referência C. O salário mensal de cada empregado da referência C é igual a R$ 2.000,00; o de cada empregado da referência B, R$ 3.500,00; e o salário mensal de cada empregado da referência A é igual a R$ 5.000,00.

Se 6 empregados dessa instituição são do sexo masculino, então o salário médio dos homens que nela trabalham está entre R$ 2.000,00 e R$ 4.000,00.

Comentários:

Caso os 6 empregados sejam da referência C, a média terá o menor valor possível. Nesse caso, com todos ganhando R$ 2.000,00, a média será igual a R$ 2.000,00.

Agora, para calcularmos a maior média possível, devemos distribuir os 6 empregados nas referências A e B. Nesse caso, teremos 2 empregados na referência A, com salário de R$ 5.000,00, e 4 empregados na referência B, ganhando R$ 3.500,00. Assim, a média será:

$$\bar{x} = \frac{5.000 \times 2 + 3.500 \times 4}{6} = 4.000$$

Portanto, a menor média possível é 2.000 e a maior média possível é 4.000.

Gabarito: Certo.

17. (CESPE/PRF/2012) Considere os eventos A, B, C e D, definidos abaixo, relativos ao número de veículos por família em determinada cidade.

A = uma família possui 1 ou mais veículos;

B = uma família possui 2 ou mais veículos;

C = uma família possui 3 ou mais veículos;

D = uma família possui 4 ou mais veículos.

Considere, ainda, que as probabilidades de ocorrência desses eventos são: P(A) = 0,9; P(B) = 0,6; P(C) = 0,3 e P(D) = 0. Com base nessas informações, julgue o item que se segue.

O número médio de veículos por família na referida cidade é igual ou superior a 2.

Comentários:

O enunciado afirma que 90% das famílias têm pelo menos 1 carro. Ora, se 90% tem pelo menos 1 carro, significa dizer que 10% não tem nenhum carro: 100%-90%=10%.

Podemos pensar numa probabilidade acumulada, se A possui 1 ou mais carros, significa que 2, 3, 4 ou mais carros estão contemplados nessa expressão.

Então, vamos calcular as probabilidades para cada família, consideremos Y a família que não tem nenhum carro:

$$Y = 1 - 0{,}9 = 0{,}1 \rightarrow tem\ 0\ carros$$

$$A = 0{,}9 - 0{,}6 = 0{,}3 \rightarrow tem\ 1\ carro$$

$$B = 0{,}6 - 0{,}3 = 0{,}3 \rightarrow tem\ 2\ carros$$

$$C = 0{,}3 - 0 = 0{,}3 \rightarrow tem\ 3\ carros$$

$$D = 0 - 0 = 0 \rightarrow tem\ 4\ carros$$

Assim, temos a quantidade exata da probabilidade de carros para cada família. Agora, basta multiplicarmos a quantidade de carros pela respectiva probabilidade e a soma disso será a média de veículos para cada família:

$$\bar{x} = \frac{(0 \times 0{,}1 + 1 \times 0{,}3 + 2 \times 0{,}3 + 3 \times 0{,}3 + 0)}{1}$$

$$\bar{x} = 1{,}8\ carro$$

Logo, o número médio de carros por família é 1,8.

Gabarito: Errado.

18. (CESPE/PRF/2012)

Q	P (%)
1	50
2	20
3	15
4	10
5	5

A tabela acima mostra a distribuição da quantidade Q de pessoas transportadas, incluindo o condutor, por veículo de passeio circulando em determinado município, obtida como resultado de uma pesquisa feita nesse município para se avaliar o sistema de transporte local. Nessa tabela, P representa a

porcentagem dos veículos de passeio circulando no município que transportam Q pessoas, para Q = 1, ..., 5. Com base nessas informações, julgue o seguinte item.

Em média, cada veículo de passeio que circula no referido município transporta duas pessoas. Portanto, se, em determinado momento, houver 10 mil veículos circulando nesse município, a quantidade esperada de pessoas que estão sendo transportadas por todos esses veículos, incluindo-se os condutores, será igual a 20 mil.

Comentários:

Inicialmente, precisamos verificar se a média realmente vale 2. Para isso, basta multiplicarmos a quantidade de pessoas por suas respectivas frequências. Assim, temos:

$$1 \times 0{,}5 = 0{,}5$$

$$2 \times 0{,}2 = 0{,}4$$

$$3 \times 0{,}15 = 0{,}45$$

$$4 \times 0{,}1 = 0{,}4$$

$$5 \times 0{,}05 = 0{,}25$$

Somando todos os resultados:

$$\frac{0{,}5 + 0{,}4 + 0{,}45 + 0{,}4 + 0{,}25}{0{,}5 + 0{,}2 + 0{,}15 + 0{,}1 + 0{,}05} = 2$$

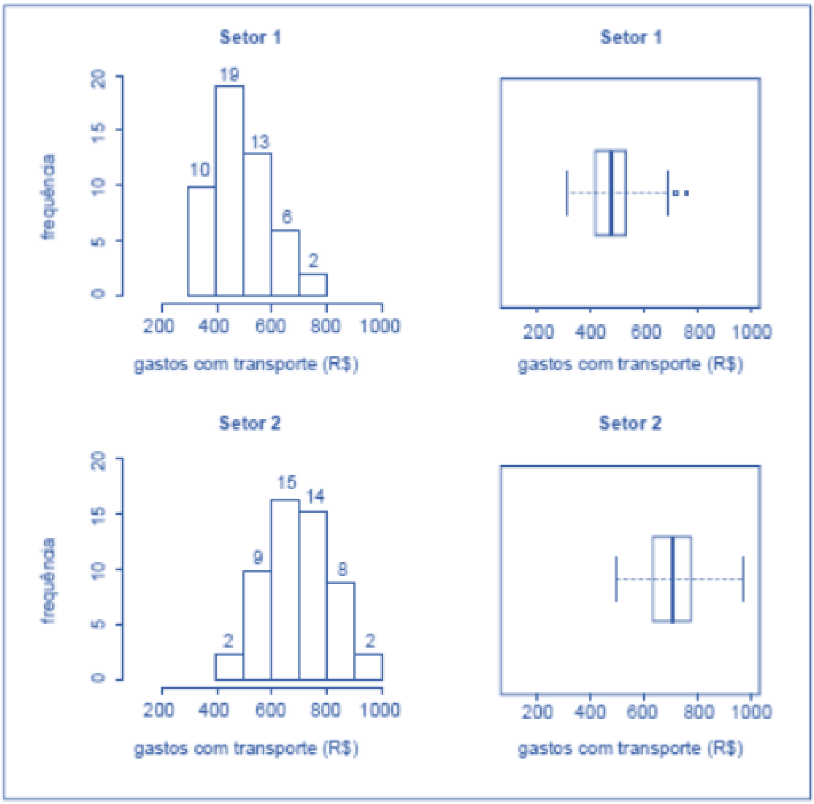
Portanto, a média realmente vale 2.

Assim, basta multiplicarmos a média por 10.000:

$$2 \times 10.000 = 20.000\ pessoas$$

Gabarito: Certo.

19. (CESPE/CAM DEP/2012)



Para avaliar os gastos com transporte de determinada diretoria, um analista coletou amostras de despesas com transportes (em R$) registradas por servidores dos setores1 e 2. Para cada setor, a amostra é constituída por 50 registros. Essas amostras foram organizadas graficamente, e os resultados são mostrados na figura acima. Nesta figura, as frequências absolutas estão indicadas nos histogramas correspondentes. Os dados foram os seguintes:

Setor 1

308,73	311,80	358,33	359,89	371,53	379,82
383,76	388,66	391,53	394,65	414,60	416,38
418,34	419,42	427,85	428,58	432,06	436,61
442,49	450,53	450,98	452,35	471,70	473,11
476,76	481,46	484,89	490,07	499,87	500,52
502,06	513,80	514,39	521,96	522,18	526,42
528,76	531,53	547,91	572,66	591,43	596,99
609,44	632,15	639,71	677,48	683,76	688,76
723,79	767,53				

Setor 2

488,37	493,73	547,72	552,66	567,94	571,49
572,26	582,00	583,63	594,77	598,46	619,25
624,20	631,03	634,51	637,21	655,70	657,56

663,81 670,12 671,90 673,78 684,69 685,98

693,35 698,58 708,78 719,80 721,16 734,84

735,94 746,34 754,83 756,10 756,96 760,80

762,29 766,24 770,11 797,73 804,06 805,97

807,29 832,83 844,00 866,77 878,27 897,09

943,10 963,25

Considerando essas informações, julgue o item.

A despesa média com transporte dos servidores do setor 1 é superior a R$ 500,00.

Comentários:

Para simplificar a resolução, vamos organizar os dados em formato tabular. Para isso, precisamos saber o ponto médio de cada classe bem suas respectivas frequências. A frequência absoluta é dada pela frequência relativa dividida pelo total de observações. Por fim, iremos multiplicar as frequências absolutas pelos pontos médios. Assim:

Classes	Ponto médio	Frequência absoluta	Frequência relativa	Frequência x Ponto médio
300 - 400	350	10	0,2	$350 \times 0{,}2 = 70$
400 - 500	450	19	0,38	$450 \times 0{,}38 = 171$
500 - 600	550	13	0,26	$550 \times 0{,}26 = 143$
600 - 700	650	6	0,12	$650 \times 0{,}12 = 78$
700 - 800	750	2	0,04	$750 \times 0{,}04 = 30$
Total		**50**		

Agora, basta somarmos o resultado dessa última multiplicação da tabela e encontraremos a média:

$$\bar{x} = \frac{70 + 171 + 143 + 78 + 30}{0{,}2 + 0{,}38 + 0{,}26 + 0{,}12 + 0{,}04}$$

$$\bar{x} = 492$$

Gabarito: Errado.

20. (CESPE/CBM-DF/2011) Uma cidade, localizada em uma região plana, foi planejada de modo que suas ruas fossem todas retilíneas e os quarteirões, quadrados com 500 m de lado. Representada a cidade em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, o eixo positivo Ox aponta para o leste e o eixo positivo Oy, para o norte, com distâncias medidas em quilômetros; as ruas de maior trânsito, Monteiro Lobato e Olavo Bilac, são expressas pelas equações 3x + 4y = 10 e 3x + 4y = 30, respectivamente. O quartel do corpo de bombeiros localiza-se na esquina da rua Monteiro Lobato com a rua Rui Barbosa,

perpendiculares entre si, tendo saída para essas duas ruas. A fim de otimizar o atendimento às ocorrências de acidentes, uma viatura fica estacionada na esquina da Olavo Bilac com a Rui Barbosa. A tabela a seguir apresenta a média mensal de acidentes de trânsito em ruas da cidade, nos últimos 12 meses.

Rua	Acidentes por mês (média)
Monteiro Lobato	14
Olavo Bilac	10
Todas as ruas paralelas à Monteiro Lobato	6

Infere-se das informações apresentadas que, nos últimos 12 meses, ocorreram menos de 350 acidentes de trânsito na cidade em questão.

Comentários:

Os valores informados na questão mostram que a média global de acidentes por mês era de:

$$14 + 10 + 6 = 30.$$

Portanto, se considerarmos os 12 meses, encontraremos um total de $30 \times 12 = 360$ acidentes.

Gabarito: Errado.

21. (CESPE/CBM-DF/2011) Uma cidade, localizada em uma região plana, foi planejada de modo que suas ruas fossem todas retilíneas e os quarteirões, quadrados com 500 m de lado. Representada a cidade em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, o eixo positivo Ox aponta para o leste e o eixo positivo Oy, para o norte, com distâncias medidas em quilômetros; as ruas de maior trânsito, Monteiro Lobato e Olavo Bilac, são expressas pelas equações $3x + 4y = 10$ e $3x + 4y = 30$, respectivamente. O quartel do corpo de bombeiros localiza-se na esquina da rua Monteiro Lobato com a rua Rui Barbosa, perpendiculares entre si, tendo saída para essas duas ruas. A fim de otimizar o atendimento às ocorrências de acidentes, uma viatura fica estacionada na esquina da Olavo Bilac com a Rui Barbosa. A tabela a seguir apresenta a média mensal de acidentes de trânsito em ruas da cidade, nos últimos 12 meses.

Rua	Acidentes por mês (média)
Monteiro Lobato	14
Olavo Bilac	10
Todas as ruas paralelas à Monteiro Lobato	6

Sabendo-se que a cidade tem pelo menos 10 ruas paralelas à rua Monteiro Lobato, é correto afirmar que, em média, ocorreram menos de 4 acidentes de trânsito nessas ruas nos últimos 12 meses.

Comentários:

Conforme o enunciado, as ruas Monteiro Lobato e Olavo Bilac são paralelas. Em média, temos $10 + 6 = 16$ acidentes por mês nas ruas paralelas à rua Monteiro Lobato. Assim, em um ano, são $16 \times 12 = 192$ acidentes.

Gabarito: Errado.

22. (CESPE/CBM-DF/2011) O governador do estado do Rio de Janeiro, Sérgio Cabral, voltou a defender a política de reajuste salarial oferecida pelo governo ao corpo de bombeiros, que prevê ganhos de 1% a cada mês em relação ao salário do mês imediatamente anterior até 2014. O governador afirmou que o efetivo de bombeiros do Rio é proporcionalmente muito superior ao de todos os estados. "O Rio de Janeiro tem 16.500 bombeiros militares, com 16 milhões de habitantes. São Paulo, com 40 milhões de habitantes, tem 8.500 bombeiros. Minas Gerais tem 20 milhões de habitantes e 5 mil bombeiros militares. Sergipe, referência de excelente salário, tem 630 bombeiros. De maneira que nós temos de ter responsabilidade. Esta política tem de seguir uma estratégia, que não é a ideal, mas é a possível." Segundo números apresentados pelo governo fluminense, o efetivo de bombeiros do Rio de Janeiro corresponde a 25% do total de bombeiros em todo o país.

Internet: <www.correiobraziliense.com.br> (com adaptações).

Com referência ao texto apresentado acima, julgue os itens:

Segundo as informações do texto, entre os estados citados a quantidade média de bombeiros é superior a 7.600.

Comentários:

Para calcularmos a média, somaremos as quantidades de bombeiros e dividiremos o resultado pela quantidade de estados considerados:

$$\bar{x} = \frac{5.000 + 16.500 + 5.000 + 630}{4} = 7.657{,}5$$

Gabarito: Certo.

23. (CESPE/CBM DF/2011) A média aritmética entre dois números reais não negativos a e b é definida por $M = \frac{a+b}{2}$, enquanto sua média geométrica é dada por $G = \sqrt{a \times b}$. São diversas as possíveis aplicações dessas duas médias no cotidiano. Por exemplo, se um investimento tem um rendimento de x% no primeiro ano e de y% no segundo ano, o rendimento médio anual será uma taxa equivalente à média aritmética entre x e y, sob um regime de capitalização simples, e à média geométrica entre 1 + x e 1 + y subtraída de uma unidade, sob um regime de capitalização composta, em que x e y devem ser expressos na forma unitária.

Com base nessas informações, julgue o próximo item.

Se um investidor obtiver, em dois anos, rendimento médio anual de 10% em um investimento regido pelo sistema de capitalização composta, e se o rendimento desse investidor, no segundo ano, for equivalente a 12%, então seu rendimento no primeiro ano será inferior a 7,8%.

Comentários:

Nessa questão, precisaremos calcular o rendimento médio de um investimento por meio da média geométrica. Para tanto, usaremos a fórmula da média geométrica dada no enunciado $G = \sqrt{a \times b}$.

O investimento tem rendimento x% no primeiro ano e de y% no segundo ano. Tomemos R para o rendimento médio anual. Montando a equação, temos:

$$R = \sqrt{(1+x) \times (1+y)} - 1$$

Substituindo rendimento médio anual de 10% (0,1) pelo sistema de capitalização composta, e rendimento de 12% (0,12) no segundo ano, temos:

$$0{,}1 = \sqrt{(1+x) \times (1+0{,}12)} - 1$$

$$1{,}1 = \sqrt{(1+x) \times 1{,}12}$$

$$1{,}21 = (1+x) \times 1{,}12$$

$$1 + x = \frac{1{,}21}{1{,}12}$$

$$x = 1{,}08 - 1$$

$$x = 0{,}08$$

$$x = 80\%$$

Gabarito: Errado.

24. (CESPE/SEFAZ-ES/2010)

Órgão	Despesa total com salários de pessoal (x r$ 10.000)	Quantidade de cargos comissionados	Quantidade de cargos efetivos
A	100	40	180
B	120	40	182
C	150	50	220
D	180	100	230

Considere que, a fim de avaliar despesas com salários do pessoal lotado em órgãos do Poder Executivo, determinada secretaria de fazenda decidiu fazer um levantamento em quatro órgãos em relação ao mês de agosto de 2009. Os dados observados estão apresentados na tabela acima. Com base nessas informações, julgue os próximos itens.

Em agosto de 2009, os salários médios do pessoal nesses órgãos foram superiores a R$ 4.500,00.

Comentários:

De acordo com o enunciado, a despesa total no órgão A foi de 100 x 10.000 = 1.000.000 reais. Como são 220 cargos, a média é:

$$\bar{x}_A = \frac{1.000.000}{220} \cong 4.545{,}45 > 4.500$$

A despesa total do órgão B foi de 120 x 10.000 = 1.200.000 reais e devemos dividir por 222 funcionários:

$$\bar{x}_B = \frac{1.200.000}{222} \cong 5.405{,}40 > 4.500$$

A despesa total do órgão C foi de 150 x 10.000 = 1.500.000 reais e devemos dividir por 270 funcionários:

$$\bar{x}_C = \frac{1.500.000}{270} \cong 5.555{,}55 > 4.500$$

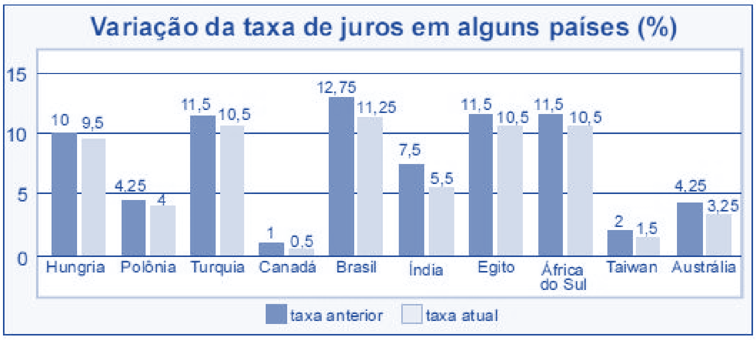
Por fim, a despesa do órgão D foi de 180 x 10.000 = 1.800.000 reais para dividir por 330 funcionários:

$$\bar{x}_D = \frac{1.800.000}{330} \cong 5.454{,}54 > 4.500$$

Logo, todas as médias são superiores a R$ 4.500,00.

Gabarito: Certo.

25. (CESPE/BB/2009)



Tendo como referência a figura acima, que mostra os valores das taxas de juros anuais, em dois anos consecutivos, denominados anterior e atual, em 10 países, julgue os itens seguintes.

O valor médio das taxas atuais dos 10 países em questão é inferior a 5%.

Comentários:

Para calcularmos a média das 10 taxas atuais, devemos somar os 10 valores e dividir o resultado por 10:

$$\bar{x} = \frac{9{,}5 + 4 + 10{,}5 + 0{,}5 + 11{,}25 + 5{,}5 + 10{,}5 + 10{,}5 + 1{,}5 + 3{,}25}{10} = 6{,}7$$

Gabarito: Errado.

26. (CESPE/ANTAC/2009)

	Variável	2003	2004	2005	2006	2007
Exportação	X	40	46	50	52	54
Importação	Y	20	21	22	24	27
Total	X+Y	60	67	72	76	81

Internet: <www.portodesantos.com> (com adaptações)

Considerando a tabela acima, que apresenta a movimentação anual de cargas no porto de Santos de 2003 a 2007, em milhões de toneladas/ano e associa as quantidades de carga movimentadas para exportação e importação às variáveis X e Y, respectivamente, julgue os itens subsequentes.

A média das diferenças X - Y no período mostrado foi superior a 25,5 milhões de toneladas/ano.

Comentários:

Primeiro, precisamos calcular as diferenças entre os valores de X e Y:

Variável	2003	2004	2005	2006	2007
X	40	46	50	52	54
Y	20	21	22	24	27
X - Y	**20**	**25**	**28**	**28**	**27**

Agora, vamos calcular a média dessas diferenças:

$$\overline{x-y} = \frac{20+25+28+28+27}{5} = 25{,}6 \; milhões\ de\ toneladas/ano$$

Gabarito: Certo.

27. (CESPE/TCU/2009) Uma instituição realizou levantamento com vistas a comparar os valores de dez diferentes tipos de itens de consumo. Para cada item $i(i = 1, 2, ..., 10)$, foi registrado um par de valores (x_i, y_i), em que xi representa o valor do item i estabelecido pela empresa A, e y_i representa o valor desse mesmo item fornecido pela empresa B. Os seguintes resultados foram encontrados:

$$\sum_{i=1}^{10}(x_i + y_i) = 130 \qquad \sum_{i=1}^{10}(x_i - y_i) = 10$$

$$\sum_{i=1}^{10}(x_i + y_i)^2 = 1.790 \qquad \sum_{i=1}^{10}(x_i - y_i)^2 = 26$$

Com base nessas informações, julgue o item a seguir.

A média harmônica dos valores x_1, x_2, ..., x_{10} é menor que 8.

Comentários:

Essa questão deve ser resolvida utilizando os conceitos de desigualdades das médias. Ao invés de começarmos calculando a média harmônica, partiremos do cálculo da média aritmética. Para isso, utilizaremos as duas primeiras equações, omitindo os limites e desmembrando as equações:

$$\sum (x_i + y_i) = 130$$

$$\sum (x_i) + \sum (y_i) = 130$$

$$\sum (x_i - y_i) = 10$$

$$\sum (x_i) - \sum (y_i) = 10$$

Somando as equações, temos:

$$\sum (x_i) + \sum (y_i) + \sum (x_i) - \sum (y_i) = 130 + 10$$

$$2 \sum (x_i) = 140$$

$$\sum (x_i) = \frac{140}{2}$$

$$\sum (x_i) = 70$$

Assim, descobrimos o valor de $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{\sum (x_i)}{10}$$

$$\bar{x} = 7$$

Sabemos que a média harmônica é sempre menor ou igual a média aritmética. Assim, concluímos que a média harmônica é menor ou igual a 7.

Gabarito: Certo.

28. (CESPE/PRF/2008)

Ficou pior para quem bebe

O governo ainda espera a consolidação dos dados do primeiro mês de aplicação da Lei Seca para avaliar seu impacto sobre a cassação de CNHs. As primeiras projeções indicam, porém, que as apreensões subirão, no mínimo, 10%. Antes da vigência da Lei Seca, eram suspensas ou cassadas, em média, aproximadamente 155.000 CNHs por ano. Se as previsões estiverem corretas, a média anual deve subir para próximo de 170.000. A tabela a seguir mostra esses resultados nos últimos anos (fonte: DENATRAN).

Ano	CNHs	
	Concedidas (milhões)	Suspensas ou cassadas
2003	1,8	148.500
2004	3,4	314.200
2005	3,2	115.700
2006	2,2	98.800
2007	2,8	112.100
2008	1,5*	64.500*
Total	**14,9**	**853.900**

*dados de janeiro a junho

Veja, ed. 2.072, 6/8/2008, p.51 (com adaptações)

Para que a média de CNHs suspensas ou cassadas, de 2003 a 2008, atinja o valor previsto de 170.000, será necessário que, em 2008, a quantidade de CNHs suspensas ou cassadas seja um número

a) inferior a 180.000.

b) superior a 180.000 e inferior a 200.000.

c) superior a 200.000 e inferior a 220.000.

d) superior a 220.000 e inferior a 240.000.

e) superior a 240.000.

Comentários:

Para calcularmos a média, devemos somar todos os valores e dividir o resultado pela quantidade de anos. Sendo S a soma dos termos e $\bar{x}$ a média aritmética deles, temos:

$$\bar{x} = \frac{S}{n}$$

$$170.000 = \frac{S}{6}$$

$$S = 6 \times 170.000 = 1.020.000$$

Conforme a tabela apresentada na questão, de 2003 até junho de 2008, a soma total é de 853.900. Contudo, para que a média seja de 170.000, a soma total deve ser 1.020.000.

Assim, de julho a dezembro de 2008, a quantidade de CNHs suspensas ou cassadas deve ser igual a:

$$1.020.000 - 853.900 = 166.100.$$

Portanto, o total de CNHs suspensas ou cassadas em todo o ano de 2008 foi igual a:

$$64.500 + 166.100 = 230.600.$$

Gabarito: D.

29. (CESPE/PRF/2008) O gráfico a seguir, que ilustra a previsão das reservas monetárias de alguns países, em 2008, deve ser considerado para o julgamento dos itens.

Com base nas informações do gráfico apresentado acima, julgue os seguintes itens.

Entre as reservas apresentadas no gráfico, apenas as da Rússia e da China superam a média aritmética das reservas de todos eles.

Comentários:

A média de reservas monetárias dos 5 países é:

$$\bar{x} = \frac{1.500 + 480 + 290 + 260 + 190}{5} = 544 \text{ } bilhões \text{ } de \text{ } dólares$$

Portanto, as reservas da Rússia não superam a média:

$$480 \text{ } bilhões \text{ } de \text{ } dólares < 544 \text{ } bilhões \text{ } de \text{ } dólares.$$

Gabarito: Errado.

30. (CESPE/TST/2008) Considere que, em um ambiente de trabalho industrial, as seguintes medições acerca da poluição do ar tenham sido observadas: 1, 6, 4, 3, 2, 3, 1, 5, 1, 4. Nessa situação, julgue o item que se segue.

As médias harmônica e geométrica são ambas inferiores a 3.

Comentários:

Antes de mais nada, devemos ter em mente que os cálculos da média geométrica e da média harmônica, para 10 números, exigiriam do candidato um esforço descomunal. Então, certamente a questão tem um caminho mais fácil. Vamos começar pela média aritmética:

$$\bar{x} = \frac{1+6+4+3+2+3+1+5+1+4}{10}$$

$$\bar{x} = \frac{30}{10} = 3$$

Agora, utilizaremos a desigualdade das médias. Quando pelo menos um dos números é diferente dos demais, a média aritmética é maior do que a média geométrica que, por sua vez, é maior que a média harmônica:

$$\bar{x} > G > H$$

$$3 > G > H$$

Dessa forma, a média harmônica e a média geométrica são menores do que 3.

Gabarito: Certo.

LISTA DE QUESTÕES

1. (CESPE/SEFAZ-DF/2020) A partir de uma amostra aleatória simples de tamanho n, sabe-se que a média aritmética de uma variável X foi igual a 3. Considerando que os valores possíveis para a variável X sejam -1 e +4, julgue o item que se segue.

Nessa amostra aleatória, a quantidade de observações iguais a +4 foi igual a 0,8 n.

2. (CESPE/UNCISAL/2019) A tabela a seguir apresenta a inflação anual no Brasil no triênio 2016–2018, segundo dados do IBGE.

Ano	Inflação (%)
2016	6,3
2017	2,9
2018	3,7

Considerando-se as informações precedentes, um produto que custava R$ 1.000,00 em dezembro de 2018 e que tenha sido reajustado em janeiro de 2019 pela média aritmética da inflação do triênio 2016–2018 passou a custar, após o reajuste,

a) R$ 1.029,00.

b) R$ 1.037,00.

c) R$ 1.043,00.

d) R$ 1.172,00.

e) R$ 1.133,00.

3. (CESPE/UNCISAL/2019) A crise mundial tem contribuído para o aumento da entrada de estrangeiros no Brasil. A maior parte vem de países vizinhos, a exemplo do Paraguai. A tabela a seguir apresenta, de acordo com dados do Ministério da Justiça, a quantidade de paraguaios que vieram para o Brasil nos anos de 2009, 2011 e 2012.

Ano	Paraguaios
2009	11000
2010	?
2011	19000
2012	27300

Disponível em: http://reporterbrasil.org.br. Acesso em: 9 nov. 2018 (adaptado).

Se a média anual de imigrantes paraguaios para o Brasil, no período de 2009 a 2012, foi de 17 600, então, quantos paraguaios imigraram para o Brasil em 2010?

a) 13 100

b) 14 325

c) 15 000

d) 15 840

e) 17 600

4. (CESPE/Pref. São Cristóvão/2019) Segundo o IBGE, a massa da renda média mensal real domiciliar per capita em 2016 foi de aproximadamente R$ 264 bilhões; a população brasileira nesse ano era de aproximadamente 190 milhões de pessoas.

A partir dessas informações, julgue o item a seguir.

A renda média mensal dos brasileiros em 2016 foi superior a R$ 1.300.

5. (CESPE/Pref. São Cristóvão/2019) Segundo o IBGE, a massa da renda média mensal real domiciliar per capita em 2016 foi de aproximadamente R$ 264 bilhões; a população brasileira nesse ano era de aproximadamente 190 milhões de pessoas.

A partir dessas informações, julgue o item a seguir.

O gráfico a seguir mostra que, em 2016, mais de 40% da massa de renda mensal real domiciliar per capita coube a 10% da população; ao restante coube menos de 60% dessa massa de renda. A partir do gráfico, é correto inferir que, naquele ano, em média, a renda mensal desses 10% da população era superior a R$ 10.000.

6. (CESPE/ABIN/2018)

Evolução da quantidade de docentes por etapa de ensino

	Brasil 2013 - 2017			
Ano	Educação infantil	Anos iniciais do ensino fundamental	Anos finais do ensino fundamental	Ensino médio
2013	478.811	750.366	802.902	507.617
2014	502.445	757.950	797.577	522.426
2015	518.308	758.840	786.140	522.826
2016	540.567	763.927	778.561	519.883
2017	557.541	761.737	764.731	509.814
Soma total das quantidades de docentes no período	2.597.672	3.792.820	3.929.911	2.582.566

Com base nos dados da tabela anterior, extraídos do Relatório das Notas Estatísticas do Censo Escolar de 2017, do INEP, julgue os itens a seguir.

A média do quantitativo de docentes do ensino médio entre os anos de 2013 e 2017 foi superior à média do quantitativo de docentes da educação infantil para o mesmo período.

7. (CESPE/BNB/2018) Em uma faculdade, para avaliar o aprendizado dos alunos em determinada disciplina, o professor aplica as provas A, B e C e a nota final do aluno é a média ponderada das notas obtidas em cada prova. Na prova A, o peso é1; na prova B, o peso é 10% maior que o peso na prova A; na prova C, o peso é20% maior que o peso na prova B.

Nesse caso, se P_A, P_B, P_C forem as notas obtidas por um aluno nas provas A, B e C, respectivamente, então a nota final desse aluno é expressa por $\frac{P_A+1,2\times P_B+1,32\times P_C}{3,52}$

8. (CESPE/SEE-DF/2017) Iniciado em 2007, o processo gradativo de substituição do sinal de TV analógico pelo digital no Brasil começou a concretizar-se em 2016. Nesse período, intensificou-se o uso da TV por assinatura, segundo dados do IBGE. A tabela a seguir mostra o percentual aproximado de domicílios brasileiros que dispunham de diferentes modalidades de acesso a TV em 2014.

Zona	Sinal digital de TV aberta	TV por assinatura	antena parabólica
Urbana	44%	36%	32%

Rural	16%	8%	79%

IBGE (com adaptações).

Considerando essas informações e o fato de que, em 2014, 86% dos domicílios brasileiros situavam-se na zona urbana, julgue os itens subsequentes.

Em 2014, havia acesso ao sinal digital de TV aberta em mais de 50% dos domicílios brasileiros.

9. (CESPE/PM-AL/2017) Em um tanque A, há uma mistura homogênea de 240 L de gasolina e 60 L de álcool; em outro tanque B, 150 L de gasolina estão misturados homogeneamente com 50 L de álcool. A respeito dessas misturas, julgue os itens subsequentes.

Considere que em um tanque C, inicialmente vazio, tenham sido despejadas certas quantidades das misturas dos tanques A e B totalizando 100 L. Considere também que, depois de homogeneizada essa mistura no tanque C, a separação de álcool e gasolina por um processo químico tenha mostrado que nesses 100 L, 22 L eram de álcool. Nessa situação, para formar essa mistura no tanque C foram usados mais de 55 L da mistura do tanque A.

10. (CESPE/FUNPRESP/2016)

Adesão ao plano	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0
Salário (em R$)	5.000	8.000	4.000	6.000	2.000	3.000	4.000	4.000	4.500	7.000

Considerando que os dados na tabela mostram salários de diferentes servidores que aderiram ou não aderiram (0) a determinado plano de previdência complementar, julgue o item subsecutivo.

A média dos salários do grupo que aderiu ao plano de previdência complementar é menor que a do que não aderiu ao plano.

11. (CESPE/TELEBRAS/2015) A equipe de atendentes de um serviço de telemarketing é constituída por 30 empregados, divididos em 3 grupos, que trabalham de acordo com a seguinte escala.

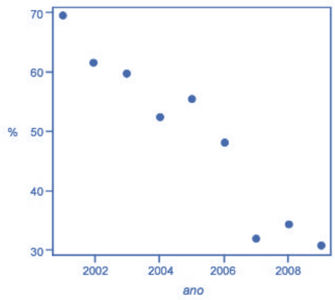
Grupo I: 7 homens e 3 mulheres, que trabalham das 6 h às 12 h.

Grupo II: 4 homens e 6 mulheres, que trabalham das 9 h às 15 h.

Grupo III: 1 homem e 9 mulheres, que trabalham das 12 h às 18 h. A respeito dessa equipe, julgue o item que se segue.

Se, nesse serviço de telemarketing, a média das idades das atendentes for de 21 anos e a média das idades dos atendentes for de 31 anos, então a média das idades de todos os 30 atendentes será de 26 anos.

12. (CESPE/DEPEN/2015)



Dado que a participação dos presidiários em cursos de qualificação profissional é um aspecto importante para a reintegração do egresso do sistema prisional à sociedade, foram realizados levantamentos estatísticos, nos anos de 2001 a 2009, a respeito do valor da educação e do trabalho em ambientes prisionais. Cada um desses levantamentos, cujos resultados são apresentados no gráfico, produziu uma estimativa anual do percentual P de indivíduos que participaram de um curso de qualificação profissional de curta duração, mas que não receberam o diploma por motivos diversos. Em 2001, 69,4% dos presidiários que participaram de um curso de qualificação profissional não receberam o diploma. No ano seguinte, 2002, esse percentual foi reduzido para 61,5%, caindo, em 2009, para 30,9%.

A partir das informações e do gráfico apresentados, julgue os itens que se seguem.

Caso a quantidade total de presidiários participantes de um curso de qualificação profissional em 2001 seja igual a N, e esse total em 2002 seja igual a 2N, a estimativa do percentual P de indivíduos que participaram de um curso de qualificação profissional de curta duração e que não receberam o diploma por motivos diversos nos anos de 2001 e 2002 é inferior a 65%.

13. (CESPE/DEPEN/2015)

Idade (x)	Percentual
$18 \leq x < 25$	30%
$25 \leq x < 30$	25%
$30 \leq x < 35$	20%
$35 \leq x < 45$	15%
$45 \leq x < 60$	10%
Total	100%

Felipe M. Monteiro, Gabriela R. Cardoso e Rafael da Silva. **A seletividade do sistema prisional brasileiro e as políticas de segurança pública**. *In*: XV Congresso Brasileiro de Sociologia, 26 a 29 de julho de 2011. Curitiba (PR). Grupo de Trabalhos - Violência e Sociedade (com adaptações).

A tabela precedente apresenta a distribuição percentual de presos no Brasil por faixa etária em 2010, segundo levantamento feito por Monteiro et al. (2011), indicando que a população prisional brasileira nesse ano era predominantemente jovem. Com base nos dados dessa tabela, julgue os itens a seguir.

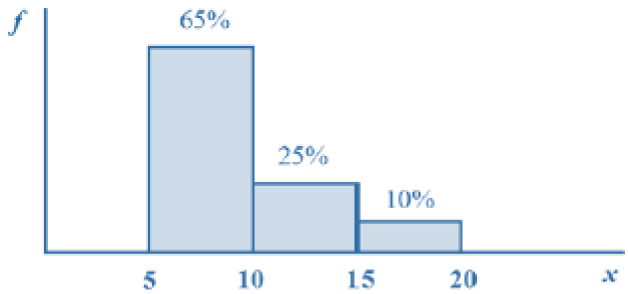
A maior parte da população prisional brasileira em 2010 era formada por pessoas com idades inferiores a 30 anos. Porém, a média da distribuição das idades dos presos no Brasil nesse ano foi superior a 30 anos.

14. (CESPE/CNJ/2013) Um estagiário deve organizar uma pilha de n processos de acordo com o valor, em reais, das sentenças e por número, em três estantes: I, II e III. O desvio padrão do valor das sentenças é R$ 50. A estante I é para processos referentes a sentenças com valores inferiores a R$ 500; a II, para processos com sentenças de valores entre R$ 500 e R$ 2.000 e a III, para processos com sentenças de valores acima de R$ 2.000.

A respeito dessa organização de processos, julgue o item a seguir.

Considerando que, em média, os processos na estante I tenham 100 páginas, os da estante II, 150 páginas e os da estante III, 300 páginas, e que as probabilidades de um processo pertencer às estantes I, II ou III sejam iguais a 4/5, 3/20 e 5/100, respectivamente, então a quantidade média de páginas de um processo será superior a 130.

15. (CESPE/STF/2013)



Com referência à figura acima, que mostra a distribuição da renda mensal — x, em quantidades de salários mínimos (sm) — das pessoas que residem em determinada região, julgue o item subsequente.

Considerando a forma de cálculo para dados agrupados, a distribuição da renda mensal x possui média igual a 9,75 sm.

16. (CESPE/TCE-RS/2012) Uma instituição possui 15 empregados: 2 da referência A, 4 da B e 9 da referência C. O salário mensal de cada empregado da referência C é igual a R$ 2.000,00; o de cada empregado da referência B, R$ 3.500,00; e o salário mensal de cada empregado da referência A é igual a R$ 5.000,00.

Se 6 empregados dessa instituição são do sexo masculino, então o salário médio dos homens que nela trabalham está entre R$ 2.000,00 e R$ 4.000,00.

17. (CESPE/PRF/2012) Considere os eventos A, B, C e D, definidos abaixo, relativos ao número de veículos por família em determinada cidade.

A = uma família possui 1 ou mais veículos;

B = uma família possui 2 ou mais veículos;

C = uma família possui 3 ou mais veículos;

D = uma família possui 4 ou mais veículos.

Considere, ainda, que as probabilidades de ocorrência desses eventos são: P(A) = 0,9; P(B) = 0,6; P(C) = 0,3 e P(D) = 0. Com base nessas informações, julgue o item que se segue.

O número médio de veículos por família na referida cidade é igual ou superior a 2.

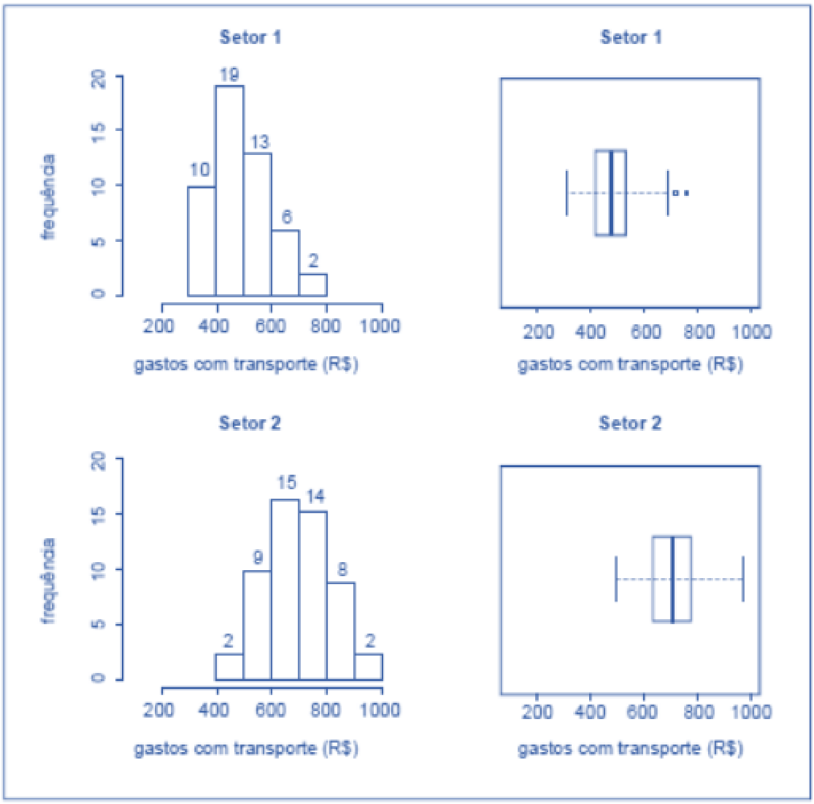
18. (CESPE/PRF/2012)

Q	P (%)
1	50
2	20
3	15
4	10
5	5

A tabela acima mostra a distribuição da quantidade Q de pessoas transportadas, incluindo o condutor, por veículo de passeio circulando em determinado município, obtida como resultado de uma pesquisa feita nesse município para se avaliar o sistema de transporte local. Nessa tabela, P representa a porcentagem dos veículos de passeio circulando no município que transportam Q pessoas, para Q = 1, ..., 5. Com base nessas informações, julgue o seguinte item.

Em média, cada veículo de passeio que circula no referido município transporta duas pessoas. Portanto, se, em determinado momento, houver 10 mil veículos circulando nesse município, a quantidade esperada de pessoas que estão sendo transportadas por todos esses veículos, incluindo-se os condutores, será igual a 20 mil.

19. (CESPE/CAM DEP/2012)



Para avaliar os gastos com transporte de determinada diretoria, um analista coletou amostras de despesas com transportes (em R$) registradas por servidores dos setores1 e 2. Para cada setor, a amostra é constituída por 50 registros. Essas amostras foram organizadas graficamente, e os resultados são mostrados na figura acima. Nesta figura, as frequências absolutas estão indicadas nos histogramas correspondentes. Os dados foram os seguintes:

Setor 1

308,73	311,80	358,33	359,89	371,53	379,82
383,76	388,66	391,53	394,65	414,60	416,38
418,34	419,42	427,85	428,58	432,06	436,61
442,49	450,53	450,98	452,35	471,70	473,11
476,76	481,46	484,89	490,07	499,87	500,52
502,06	513,80	514,39	521,96	522,18	526,42
528,76	531,53	547,91	572,66	591,43	596,99
609,44	632,15	639,71	677,48	683,76	688,76
723,79	767,53				

Setor 2

488,37	493,73	547,72	552,66	567,94	571,49
572,26	582,00	583,63	594,77	598,46	619,25
624,20	631,03	634,51	637,21	655,70	657,56

663,81	**670,12**	**671,90**	**673,78**	**684,69**	**685,98**
693,35	**698,58**	**708,78**	**719,80**	**721,16**	**734,84**
735,94	**746,34**	**754,83**	**756,10**	**756,96**	**760,80**
762,29	**766,24**	**770,11**	**797,73**	**804,06**	**805,97**
807,29	**832,83**	**844,00**	**866,77**	**878,27**	**897,09**
943,10	**963,25**				

Considerando essas informações, julgue o item.

A despesa média com transporte dos servidores do setor 1 é superior a R$ 500,00.

20. (CESPE/CBM-DF/2011) Uma cidade, localizada em uma região plana, foi planejada de modo que suas ruas fossem todas retilíneas e os quarteirões, quadrados com 500 m de lado. Representada a cidade em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, o eixo positivo Ox aponta para o leste e o eixo positivo Oy, para o norte, com distâncias medidas em quilômetros; as ruas de maior trânsito, Monteiro Lobato e Olavo Bilac, são expressas pelas equações 3x + 4y = 10 e 3x + 4y = 30, respectivamente. O quartel do corpo de bombeiros localiza-se na esquina da rua Monteiro Lobato com a rua Rui Barbosa, perpendiculares entre si, tendo saída para essas duas ruas. A fim de otimizar o atendimento às ocorrências de acidentes, uma viatura fica estacionada na esquina da Olavo Bilac com a Rui Barbosa. A tabela a seguir apresenta a média mensal de acidentes de trânsito em ruas da cidade, nos últimos 12 meses.

Rua	Acidentes por mês (média)
Monteiro Lobato	14
Olavo Bilac	10
Todas as ruas paralelas à Monteiro Lobato	6

Infere-se das informações apresentadas que, nos últimos 12 meses, ocorreram menos de 350 acidentes de trânsito na cidade em questão.

21. (CESPE/CBM-DF/2011) Uma cidade, localizada em uma região plana, foi planejada de modo que suas ruas fossem todas retilíneas e os quarteirões, quadrados com 500 m de lado. Representada a cidade em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, o eixo positivo Ox aponta para o leste e o eixo positivo Oy, para o norte, com distâncias medidas em quilômetros; as ruas de maior trânsito, Monteiro Lobato e Olavo Bilac, são expressas pelas equações 3x + 4y = 10 e 3x + 4y = 30, respectivamente. O quartel do corpo de bombeiros localiza-se na esquina da rua Monteiro Lobato com a rua Rui Barbosa, perpendiculares entre si, tendo saída para essas duas ruas. A fim de otimizar o atendimento às ocorrências de acidentes, uma viatura fica estacionada na esquina da Olavo Bilac com a Rui Barbosa. A tabela a seguir apresenta a média mensal de acidentes de trânsito em ruas da cidade, nos últimos 12 meses.

Rua	Acidentes por mês (média)

Monteiro Lobato	14
Olavo Bilac	10
Todas as ruas paralelas à Monteiro Lobato	6

Sabendo-se que a cidade tem pelo menos 10 ruas paralelas à rua Monteiro Lobato, é correto afirmar que, em média, ocorreram menos de 4 acidentes de trânsito nessas ruas nos últimos 12 meses.

22. (CESPE/CBM-DF/2011) O governador do estado do Rio de Janeiro, Sérgio Cabral, voltou a defender a política de reajuste salarial oferecida pelo governo ao corpo de bombeiros, que prevê ganhos de 1% a cada mês em relação ao salário do mês imediatamente anterior até 2014. O governador afirmou que o efetivo de bombeiros do Rio é proporcionalmente muito superior ao de todos os estados. "O Rio de Janeiro tem 16.500 bombeiros militares, com 16 milhões de habitantes. São Paulo, com 40 milhões de habitantes, tem 8.500 bombeiros. Minas Gerais tem 20 milhões de habitantes e 5 mil bombeiros militares. Sergipe, referência de excelente salário, tem 630 bombeiros. De maneira que nós temos de ter responsabilidade. Esta política tem de seguir uma estratégia, que não é a ideal, mas é a possível." Segundo números apresentados pelo governo fluminense, o efetivo de bombeiros do Rio de Janeiro corresponde a 25% do total de bombeiros em todo o país.

Internet: <www.correiobraziliense.com.br> (com adaptações).

Com referência ao texto apresentado acima, julgue os itens:

Segundo as informações do texto, entre os estados citados a quantidade média de bombeiros é superior a 7.600.

23. (CESPE/CBM DF/2011) A média aritmética entre dois números reais não negativos a e b é definida por $M = \frac{a+b}{2}$, enquanto sua média geométrica é dada por $G = \sqrt{a \times b}$. São diversas as possíveis aplicações dessas duas médias no cotidiano. Por exemplo, se um investimento tem um rendimento de x% no primeiro ano e de y% no segundo ano, o rendimento médio anual será uma taxa equivalente à média aritmética entre x e y, sob um regime de capitalização simples, e à média geométrica entre 1 + x e 1 + y subtraída de uma unidade, sob um regime de capitalização composta, em que x e y devem ser expressos na forma unitária.

Com base nessas informações, julgue o próximo item.

Se um investidor obtiver, em dois anos, rendimento médio anual de 10% em um investimento regido pelo sistema de capitalização composta, e se o rendimento desse investidor, no segundo ano, for equivalente a 12%, então seu rendimento no primeiro ano será inferior a 7,8%.

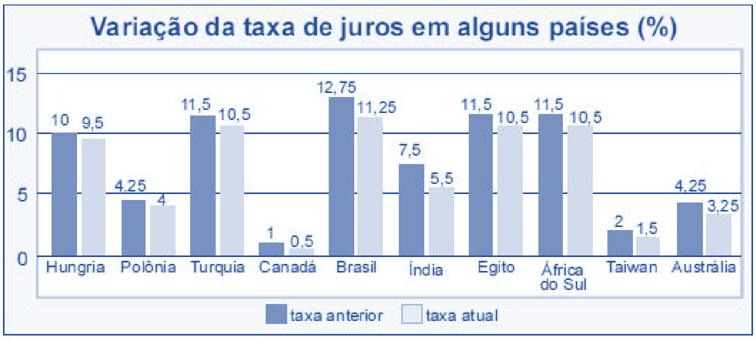
24. (CESPE/SEFAZ-ES/2010)

Órgão	Despesa total com salários de pessoal (x r$ 10.000)	Quantidade de cargos comissionados	Quantidade de cargos efetivos
A	100	40	180
B	120	40	182
C	150	50	220
D	180	100	230

Considere que, a fim de avaliar despesas com salários do pessoal lotado em órgãos do Poder Executivo, determinada secretaria de fazenda decidiu fazer um levantamento em quatro órgãos em relação ao mês de agosto de 2009. Os dados observados estão apresentados na tabela acima. Com base nessas informações, julgue os próximos itens.

Em agosto de 2009, os salários médios do pessoal nesses órgãos foram superiores a R$ 4.500,00.

25. (CESPE/BB/2009)



Tendo como referência a figura acima, que mostra os valores das taxas de juros anuais, em dois anos consecutivos, denominados anterior e atual, em 10 países, julgue os itens seguintes.

O valor médio das taxas atuais dos 10 países em questão é inferior a 5%.

26. (CESPE/ANTAC/2009)

	Variável	2003	2004	2005	2006	2007
Exportação	X	40	46	50	52	54
Importação	Y	20	21	22	24	27
Total	X+Y	60	67	72	76	81

Internet: <www.portodesantos.com> (com adaptações)

Considerando a tabela acima, que apresenta a movimentação anual de cargas no porto de Santos de 2003 a 2007, em milhões de toneladas/ano e associa as quantidades de carga movimentadas para exportação e importação às variáveis X e Y, respectivamente, julgue os itens subsequentes.

A média das diferenças X - Y no período mostrado foi superior a 25,5 milhões de toneladas/ano.

27. (CESPE/TCU/2009) Uma instituição realizou levantamento com vistas a comparar os valores de dez diferentes tipos de itens de consumo. Para cada item $i(i = 1, 2, \ldots, 10)$, foi registrado um par de valores (x_i, y_i), em que xi representa o valor do item i estabelecido pela empresa A, e y_i representa o valor desse mesmo item fornecido pela empresa B. Os seguintes resultados foram encontrados:

$$\sum_{i=1}^{10}(x_i + y_i) = 130 \qquad \sum_{i=1}^{10}(x_i - y_i) = 10$$

$$\sum_{i=1}^{10}(x_i + y_i)^2 = 1.790 \qquad \sum_{i=1}^{10}(x_i - y_i)^2 = 26$$

Com base nessas informações, julgue o item a seguir.

A média harmônica dos valores x_1, x_2, ..., x_{10} é menor que 8.

28. (CESPE/PRF/2008)

Ficou pior para quem bebe

O governo ainda espera a consolidação dos dados do primeiro mês de aplicação da Lei Seca para avaliar seu impacto sobre a cassação de CNHs. As primeiras projeções indicam, porém, que as apreensões subirão, no mínimo, 10%. Antes da vigência da Lei Seca, eram suspensas ou cassadas, em média, aproximadamente 155.000 CNHs por ano. Se as previsões estiverem corretas, a média anual deve subir para próximo de 170.000. A tabela a seguir mostra esses resultados nos últimos anos (fonte: DENATRAN).

Ano	CNHs	
	Concedidas (milhões)	Suspensas ou cassadas
2003	1,8	148.500
2004	3,4	314.200
2005	3,2	115.700
2006	2,2	98.800
2007	2,8	112.100

2008	1,5*	64.500*
Total	**14,9**	**853.900**

*dados de janeiro a junho

Veja, ed. 2.072, 6/8/2008, p.51 (com adaptações)

Para que a média de CNHs suspensas ou cassadas, de 2003 a 2008, atinja o valor previsto de 170.000, será necessário que, em 2008, a quantidade de CNHs suspensas ou cassadas seja um número

a) inferior a 180.000.

b) superior a 180.000 e inferior a 200.000.

c) superior a 200.000 e inferior a 220.000.

d) superior a 220.000 e inferior a 240.000.

e) superior a 240.000.

29. (CESPE/PRF/2008) O gráfico a seguir, que ilustra a previsão das reservas monetárias de alguns países, em 2008, deve ser considerado para o julgamento dos itens.

Com base nas informações do gráfico apresentado acima, julgue os seguintes itens.

Entre as reservas apresentadas no gráfico, apenas as da Rússia e da China superam a média aritmética das reservas de todos eles.

30. (CESPE/TST/2008) Considere que, em um ambiente de trabalho industrial, as seguintes medições acerca da poluição do ar tenham sido observadas: 1, 6, 4, 3, 2, 3, 1, 5, 1, 4. Nessa situação, julgue o item que se segue.

As médias harmônica e geométrica são ambas inferiores a 3.

QUESTÕES COMPLEMENTARES COMENTADAS

Questões da FGV

31. (FGV/Pref. Salvador/2019) Em uma pequena empresa, a média salarial dos 12 funcionários era de R$ 2400,00. Lúcio Mauro, que ganhava R3000,00, se aposentou e para ocupar sua vaga foi contratado Felipe, com um salário de R$ 1800,00.

Assinale a opção que indica a nova média salarial dos 12 funcionários dessa empresa.

a) R$ 2350,00

b) R$ 2300,00

c) R$ 2280,00

d) R$ 2250,00

e) R$ 2200,00

Comentários:

Temos que a média salarial dos 12 funcionários era R$ 2.400,00, então a soma dos salários era:

$$soma \ = \ média \times quantidade$$

$$soma \ = \ R\$\ 2.400{,}00 \times 12 = R\$\ 28.800{,}00$$

Saindo Lúcio Mauro, que ganhava R$ 3.000,00, e entrando Felipe, com um salário de R$ 1.800,00, a soma dos salários passa a ser:

$$R\$\ 28.800{,}00 - RS\ 3.000{,}00 + R\$\ 1.800{,}00 = R\$\ 27.600{,}00$$

Portanto, a nova média salarial dos 12 funcionários é igual a:

$$\bar{x} = \frac{R\$\ 27.600{,}00}{12} = R\$\ 2.300{,}00$$

Gabarito: B.

32. (FGV/ALE-RO/2018) A média de dez números diferentes é 8. A média dos quatro menores desses números é 5. A média dos seis maiores daqueles dez números é

a) 12.

b) 11.

c) 10.

d) 9.

e) 8.

Comentários:

De acordo com o enunciado, a média de dez números diferentes é 8. Logo, a soma dos 10 números é:

$$soma = média \times quantidade$$

$$S_{10} = 8 \times 10 = 80$$

Além disso, a questão informa que a média dos quatro menores números é 5. Assim, a soma deles é:

$$S_4 = 5 \times 4 = 20$$

Portanto, a soma dos outros 6 números é $80 - 20 = 60$. Agora, para calcularmos a média, basta dividirmos essa soma pela quantidade de números restantes:

$$\bar{x} = \frac{60}{6} = 10$$

Gabarito: C.

33. (FGV/BANESTES/2018) A média dos quatro maiores salários de uma determinada empresa é R$ 14.700,00. A média dos cinco maiores salários dessa mesma empresa é R$ 14.250,00.

O quinto maior salário dessa empresa é:

a) R$ 12.450,00;

b) R$ 12.500,00;

c) R$ 12.550,00;

d) R$ 12.600,00;

e) R$ 12.650,00.

Comentários:

Para calcular a soma de uma lista de números, basta multiplicar a média aritmética pela quantidade de termos.

$$soma = média \times quantidade$$

Sabemos que a média dos quatro maiores salários é igual a 14.700. Assim, a soma dos quatro maiores salários é

$$S_4 = 14.700 \times 4 = 58.800$$

Também sabemos que a média dos cinco maiores salários é 14.250. Portanto, a soma dos cinco maiores salários é

$$S_5 = 14.250 \times 5 = 71.250$$

O quinto maior salário é justamente a diferença entre as somas acima.

Para ficar mais claro, vamos detalhar um pouco mais. Sejam x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 os cinco maiores salários.

A soma dos 4 maiores salários é 58.800:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 58.800$$

A soma dos cinco maiores salários é 71.250:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 71.250$$

Observe:

$$\underbrace{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}_{=58.800} + x_5 = 71.250$$

$$58.800 + x_5 = 71.250$$

$$x_5 = 71.250 - 58.800$$

$$x_5 = 12.450$$

Gabarito: A.

34. (FGV/BANESTES/2018) Em uma empresa, os funcionários são classificados em atendentes, técnicos ou gerentes. A tabela abaixo mostra a quantidade de funcionários de cada categoria e o salário que cada um recebe.

Categoria	Número de Funcionários	Salário em reais
Atendente	10	1800
Técnico	8	3000
Gerente	2	4200

Nessa empresa, o salário médio dos seus funcionários é de:

a) 2480 reais;

b) 2520 reais;

c) 2640 reais;

d) 2700 reais;

e) 3000 reais.

Comentários:

Para calcular a média de dados agrupados por valor, devemos multiplicar cada valor pela sua respectiva frequência, somar os resultados e dividir pela soma das frequências:

$$\bar{x} = \frac{1.800 \times 10 + 3.000 \times 8 + 4.200 \times 2}{10 + 8 + 2}$$

$$\bar{x} = \frac{50.400}{20} = 2.520$$

Gabarito: B.

35. (FGV/BANESTES/2018) Alberto aplicou um capital C da seguinte forma:

a) 40% de C em papéis de Renda Fixa (R.F.);

b) 60% de C em Letra de Crédito Imobiliário (L.C.I.).

Ao longo de um ano, nenhum novo depósito foi feito em qualquer das duas modalidades de aplicação. Nesse mesmo período, não houve qualquer resgate. Se as taxas efetivas de rendimento da R.F. e da L.C.I., no período referido, foram de 15% a.a. e 10% a.a., respectivamente, então essa estratégia conjunta de aplicação possibilitou a Alberto uma rentabilidade total sobre o capital C de:

a) 25%;

b) 19%;

c) 15%;

d) 12%;

e) 5%.

Comentários:

Para facilitar a resolução da questão, podemos considerar que Alberto aplicou 1.000 reais. Assim, foram aplicados 400 reais em papéis de renda fixa e 600 reais em letras de crédito imobiliário.

Segundo o enunciado, ele obteve um rendimento de 15% em papéis de renda fixa e 10% em letras de crédito imobiliário:

$$rendimento = 15\% \times 400 + 10\% \times 600$$

$$rendimento = 0{,}15 \times 400 + 0{,}10 \times 600$$

$$rendimento = 120\ reais$$

Como ele aplicou 1000 reais e obteve um rendimento de 120 reais, a rentabilidade total foi de:

$$\frac{12}{1000} = 12\%.$$

Gabarito: D.

36. (FGV/COMPESA/2018) Em um determinado dia de julho, em Recife, a diferença entre a temperatura máxima e a temperatura mínima foi de 6,8ºC. A média entre a temperatura máxima e a mínima, nesse dia, foi de 24,3ºC. Nesse dia, a temperatura mínima em Recife foi

a) 20,9ºC.

b) 21,1ºC.

c) 21,3ºC.

d) 21,5ºC.

e) 21,7ºC.

Comentários:

Sendo $x_{máx}$ e $x_{mín}$ as temperaturas máxima e mínima, respectivamente, a diferença entre essas temperaturas é 6,8:

$$x_{máx} - x_{mín} = 6{,}8$$

$$x_{máx} = x_{mín} + 6{,}8$$

Conforme o enunciado, a média entre a temperatura máxima e a mínima, nesse dia, foi de 24,3ºC:

$$\frac{x_{máx} + x_{mín}}{2} = 24{,}3$$

$$x_{máx} + x_{mín} = 48{,}6$$

Agora, vamos substituir $x_{máx}$ por $x_{mín} + 6{,}8$:

$$x_{mín} + 6{,}8 + x_{mín} = 48{,}6$$

$$2 \times x_{mín} = 41{,}8$$

$$x_{mín} = 20{,}9$$

Gabarito: A.

37. (FGV/CGM Niterói/2018) Um casal pesou suas quatro malas no aeroporto para o embarque. As três primeiras malas pesaram 8 kg, 12 kg e 9 kg. Sabe-se que a média dos pesos das quatro malas foi de 11 kg. O peso da quarta mala é

a) 12 kg.

b) 13 kg.

c) 14 kg.

d) 15 kg.

e) 16 kg.

Comentários:

Conforme o enunciado, a média dos pesos das quatro malas foi de 11 kg. Assim, a soma dos pesos das quatro malas é:

$$Soma = média \times quantidade$$

$$Soma = 11 \times 4 = 44\ kg$$

As três primeiras malas juntas pesam:

$$8 + 12 + 9 = 29\ kg$$

Portanto, o peso da quarta mala é:

$$44 - 29 = 15\ kg$$

Gabarito: D.

38. (FGV/Pref. Angra/2019) A média dos pesos de cinco crianças é de 33,6 kg. Quatro delas pesam, respectivamente, 31 kg, 34 kg, 38 kg e 30 kg. A 5ª criança pesa

a) 32 Kg

b) 35 Kg

c) 36 Kg

d) 37 Kg

e) 38 Kg

Comentários:

A média aritmética resulta da divisão entre a soma de um conjunto de valores e o número de valores. Assim, temos que a média dos pesos de cinco crianças é de 33,6 kg e quatro delas pesam, respectivamente, 31 kg, 34 kg, 38 kg e 30 kg, logo:

$$33{,}6 = \frac{31 + 34 + 38 + 30 + x}{5}$$

$$168 = 133 + x$$

$$x = 35\ Kg$$

Gabarito: B.

39. (FGV/Pref. Boa Vista/2018) No exame médico, os pesos das cinco crianças da sala de Joana foram: 29,0 kg, 27,5 kg, 31,0 kg, 22,5 kg e 32,0 kg. O peso médio dessas crianças é:

a) 27,8 kg;

b) 28,0 kg;

c) 28,2 kg;

d) 28,4 kg;

e) 28,6 kg.

Comentários:

Para calcularmos a média dos pesos das cinco crianças, somaremos os valores e dividiremos o resultado pela quantidade de crianças:

$$\bar{x} = \frac{29{,}0 + 27{,}5 + 31{,}0 + 22{,}5 + 32{,}0}{5} = \frac{142}{5} = 28{,}4$$

Gabarito: D.

40. (FGV/TJ-SC/2018) Uma pequena empresa tem 10 funcionários. A média salarial dos 6 funcionários com menores salários é R$ 2600,00 e a média salarial dos 4 funcionários com maiores salários é R$ 4200,00. A média salarial dos 10 funcionários dessa empresa é:

a) R$ 3480,00;

b) R$ 3440,00;

c) R$ 3400,00;

d) R$ 3360,00;

e) R$ 3240,00.

Comentários:

De acordo com a questão, a média salarial dos 6 funcionários com menores salários é R$ 2600,00. Assim, a soma desses 6 salários é:

$$Soma = média \times quantidade$$

$$Soma = 2.600 \times 6 = 15.600$$

Além disso, a média salarial dos outros 4 funcionários é R$ 4.200. Logo, a soma dos salários deles é:

$$Soma = 4.200 \times 4 = 16.800$$

Considerando os salários dos 10 funcionários, temos a soma:

$$15.600 \ + \ 16.800 \ = \ 32.400$$

Assim, a média dos 10 salários é:

$$\bar{x} = \frac{32.400}{10} = 3.240$$

Também podemos responder essa questão de outra forma. Sempre que estivermos trabalhando com dois ou mais conjuntos mutuamente excludentes, a média global será a média ponderada das médias dos conjuntos:

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 \times n_1 + \bar{x}_2 \times n_2}{n_1 + n_2}$$

$$\bar{x} = \frac{2.600 \times 6 + 4.200 \times 4}{6 + 4} = 3.240$$

Gabarito: E.

Lista de Questões Complementares

Questões da FGV

31. (FGV/Pref. Salvador/2019) Em uma pequena empresa, a média salarial dos 12 funcionários era de R$ 2400,00. Lúcio Mauro, que ganhava R3000,00, se aposentou e para ocupar sua vaga foi contratado Felipe, com um salário de R$ 1800,00.

Assinale a opção que indica a nova média salarial dos 12 funcionários dessa empresa.

a) R$ 2350,00

b) R$ 2300,00

c) R$ 2280,00

d) R$ 2250,00

e) R$ 2200,00

32. (FGV/ALE-RO/2018) A média de dez números diferentes é 8. A média dos quatro menores desses números é 5. A média dos seis maiores daqueles dez números é

a) 12.

b) 11.

c) 10.

d) 9.

e) 8.

33. (FGV/BANESTES/2018) A média dos quatro maiores salários de uma determinada empresa é R$ 14.700,00. A média dos cinco maiores salários dessa mesma empresa é R$ 14.250,00.

O quinto maior salário dessa empresa é:

a) R$ 12.450,00;

b) R$ 12.500,00;

c) R$ 12.550,00;

d) R$ 12.600,00;

e) R$ 12.650,00.

34. (FGV/BANESTES/2018) Em uma empresa, os funcionários são classificados em atendentes, técnicos ou gerentes. A tabela abaixo mostra a quantidade de funcionários de cada categoria e o salário que cada um recebe.

Categoria	Número de Funcionários	Salário em reais
Atendente	10	1800
Técnico	8	3000
Gerente	2	4200

Nessa empresa, o salário médio dos seus funcionários é de:

a) 2480 reais;

b) 2520 reais;

c) 2640 reais;

d) 2700 reais;

e) 3000 reais.

35. (FGV/BANESTES/2018) Alberto aplicou um capital C da seguinte forma:

a) 40% de C em papéis de Renda Fixa (R.F.);

b) 60% de C em Letra de Crédito Imobiliário (L.C.I.).

Ao longo de um ano, nenhum novo depósito foi feito em qualquer das duas modalidades de aplicação. Nesse mesmo período, não houve qualquer resgate. Se as taxas efetivas de rendimento da R.F. e da L.C.I., no período referido, foram de 15% a.a. e 10% a.a., respectivamente, então essa estratégia conjunta de aplicação possibilitou a Alberto uma rentabilidade total sobre o capital C de:

a) 25%;

b) 19%;

c) 15%;

d) 12%;

e) 5%.

36. (FGV/COMPESA/2018) Em um determinado dia de julho, em Recife, a diferença entre a temperatura máxima e a temperatura mínima foi de 6,8ºC. A média entre a temperatura máxima e a mínima, nesse dia, foi de 24,3ºC. Nesse dia, a temperatura mínima em Recife foi

a) 20,9ºC.

b) 21,1ºC.

c) 21,3ºC.

d) 21,5ºC.

e) 21,7ºC.

37. (FGV/CGM Niterói/2018) Um casal pesou suas quatro malas no aeroporto para o embarque. As três primeiras malas pesaram 8 kg, 12 kg e 9 kg. Sabe-se que a média dos pesos das quatro malas foi de 11 kg. O peso da quarta mala é

a) 12 kg.

b) 13 kg.

c) 14 kg.

d) 15 kg.

e) 16 kg.

38. (FGV/Pref. Angra/2019) A média dos pesos de cinco crianças é de 33,6 kg. Quatro delas pesam, respectivamente, 31 kg, 34 kg, 38 kg e 30 kg. A 5ª criança pesa

a) 32 Kg

b) 35 Kg

c) 36 Kg

d) 37 Kg

e) 38 Kg

39. (FGV/Pref. Boa Vista/2018) No exame médico, os pesos das cinco crianças da sala de Joana foram: 29,0 kg, 27,5 kg, 31,0 kg, 22,5 kg e 32,0 kg. O peso médio dessas crianças é:

a) 27,8 kg;

b) 28,0 kg;

c) 28,2 kg;

d) 28,4 kg;

e) 28,6 kg.

40. (FGV/TJ-SC/2018) Uma pequena empresa tem 10 funcionários. A média salarial dos 6 funcionários com menores salários é R$ 2600,00 e a média salarial dos 4 funcionários com maiores salários é R$ 4200,00. A média salarial dos 10 funcionários dessa empresa é:

a) R$ 3480,00;

b) R$ 3440,00;

c) R$ 3400,00;

d) R$ 3360,00;

e) R$ 3240,00.

Gabarito

1. CERTO
2. LETRA C
3. LETRA A
4. CERTO
5. ERRADO
6. ERRADO
7. ERRADO
8. ERRADO
9. CERTO
10. ERRADO
11. ERRADO
12. CERTO
13. CERTO
14. ERRADO
15. CERTO
16. CERTO
17. ERRADO
18. CERTO
19. ERRADO
20. ERRADO
21. ERRADO
22. CERTO
23. ERRADO
24. CERTO
25. ERRADO
26. CERTO
27. CERTO
28. LETRA D
29. ERRADO
30. CERTO
31. LETRA B
32. LETRA C
33. LETRA A
34. LETRA B
35. LETRA D
36. LETRA A
37. LETRA D
38. LETRA B
39. LETRA D
40. LETRA E