Sumário

APRESENTAÇÃO

Olá, caros amigos do Estratégia Concursos, tudo bem?

É com enorme prazer e satisfação que lanço este EBOOK de questão comentadas de **Matemática Financeira** com foco exclusivamente na **banca FGV**. Iremos resolver **50 exercícios** que irão abordar todo o conteúdo exigido da disciplina.

Antes de prosseguir, peço licença para me apresentar:

> Vinícius Veleda: Sou **Auditor Fiscal do Estado do Rio Grande do Sul**. Professor de Matemática e Matemática Financeira do Estratégia Concursos. Aprovado nos Concursos de Auditor Fiscal da Secretaria da Fazenda dos Estados do Rio Grande do Sul (SEFAZ RS), Santa Catarina (SEFAZ SC) e Goiás (SEFAZ GO). Formado em Engenharia de Petróleo pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) com graduação sanduíche em Engenharia Geológica pela Universidade Politécnica de Madrid (UPM). Certificado pela PUC-RS em Tesouraria com foco em Matemática Financeira.

Você irá perceber que as resoluções das questões são todas feitas passo a passo e bem detalhadas. As **respostas intermediárias** terão um quadrado **azul** enquanto a **resposta final** terá um círculo **vinho**. Tudo bem detalhado e "limpo" para você absorver ao máximo o conteúdo.

O material abordará questões dos mais variados níveis, desde os mais simples aos mais complexos**. Façam TODAS as questões**. O segredo para o domínio das questões de exatas é a quantidade de exercícios resolvidos por você na hora da preparação.

Contem sempre comigo. Caso tenham dúvidas, enviem no **Fórum de Dúvidas** ou por e-mail ***vinicius.veleda@estrategiaconcursos.com.br***.

> "Seja qual for o seu sonho, batalhe, lute por ele, não o espere. Seja diferenciado. Não se sinta superior, seja humilde, mas seja diferenciado. Faça sua vida valer a pena. Crie um ideal para ela e siga a jornada até estar concluída, até ser **aprovado**! "

Vinícius Veleda

1. JUROS SIMPLES

1. **(FGV / CGM Niterói - 2018) Uma fatura de cartão de crédito foi paga com dois meses de atraso, e o valor pago, incluindo os 25% de juros correspondentes ao bimestre, foi de R$ 1.100,00.**

O valor da fatura sem os juros era de

a) R$ 825,00
b) R$ 842,00
c) R$ 860,00
d) R$ 874,00
e) R$ 880,00

Comentários:

Vamos chamar o valor da fatura de $\boldsymbol{x}$, uma vez que **não sabemos seu valor** e é isto que a banca nos questiona.

A fatura x foi paga com atraso de 1 bimestre com juros de 25% resultando em um Montante de R$ 1.100,00.

Iremos resolver esta questão com base na porcentagem e também na equação dos Juros.

- **Porcentagem**

Matematicamente teremos a seguinte equação:

$$x + \frac{25}{100} \times x = 1.100$$

Ou seja, o valor da fatura mais juros de 25% em cima da fatura resulta no Montante pago de R$ 1.100. Resvolendo e calculando x.

$$x + \frac{25}{100} \times x = 1.100$$

$$x + 0{,}25x = 1.100$$

$$1{,}25x = 1.100$$

$$x = \frac{1.100}{1{,}25} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 880}$$

- **Juros Simples**

No regime de Juros Simples, o **Montante** é calculado pela seguinte equação:

$$M = C \times (1 + i \times t)$$

Onde,

$M = Montante\ Simples = 1.100$

$C = Capital\ (fatura) = x$

$i = Taxa\ de\ Juros = \ 25\%\ no\ bimestre = 0{,}25$

$t = tempo = \ 1\ bimestre$

Observe que a Taxa de Juros é fornecida no prazo correspondente ao bimestre. Logo, o tempo (que deve **necessariamente** estar na mesma unidade da Taxa de Juros) também é "em bimestre".

Vamos substituir os valores e calcular o valor do Capital x.

$$M = C \times (1 + i \times t)$$

$$1.100 = x \times (1 + 0{,}25 \times 1)$$

$$1.100 = x \times (1 + 0{,}25)$$

$$1.100 = 1{,}25x$$

$$x = \frac{1.100}{1{,}25} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 880}$$

Observe, então, que os resultados coincidiram.

"Professor, entendi. Porém, a questão não traz no enunciado o regime de Juros. Não diz se é simples ou composto".

Verdade. Mas, perceba que estamos tratando um **período de 1 unidade de tempo** (que no nosso caso é "bimestre"). E, estudamos que, quando estamos com o tempo de referência de 1 unidade de tempo, o Montante Simples é igual ao Montante Composto.

Resumindo: Para o tempo igual a 1 unidade, tanto faz você utilizar a fórmula dos Juros Simples (vista nessa aula) ou a fórmula dos Juros Compostos (próxima aula).

Gabarito: Alternativa **E**

2. **(FGV / Banestes - 2018) Um capital aplicado a juros simples produz o montante de R$ 7.200,00 em cinco meses e, em oito meses, esse montante passa a valer R$ 7.680,00.**

Nessas condições, a taxa de juros aplicada a esse capital é de:

a) 2,20% a.m.
b) 2,25% a.m.

c) 2,36% a.m.
d) 2,44% a.m.
e) 2,50% a.m.

Comentários:

Vamos dividir o problema em 2 e, posteriormente, resolver o sistema.

- *Um capital C aplicado a juros simples produz o montante de R$ 7.200,00 em cinco meses.*

Iremos aplicar diretamente a fórmula do **Montante** em regime de Juros Simples.

$$M = C \times (1 + i \times t)$$

$$7.200 = C \times (1 + i \times 5)$$

$$\boldsymbol{7.200 = C \times (1 + 5i) \quad equação\ (I)}$$

- *Um capital C aplicado a juros simples produz o montante de R$ 7.680,00 em oito meses.*

Aplicando novamente a fórmula do **Montante** teremos:

$$M = C \times (1 + i \times t)$$

$$7.680 = C \times (1 + i \times 8)$$

$$\boldsymbol{7.680 = C \times (1 + 8i) \quad equação\ (II)}$$

Perceba, então, que temos um Sistema composto por 2 equações (I e II) e 2 incógnitas (C e i).

Você pode resolver isolando o Capital na primeira e substituindo na segunda. Ou, armando o Sistema e dividindo uma equação pela outra.

Vamos adotar o primeiro caminho. Iremos **isolar o valor de C na equação (I) e substituir na equação (II).**

$$7.200 = C \times (1 + 5i)$$

Isolando C:

$$\boxed{\boldsymbol{C = \frac{7.200}{(1 + 5i)}}}$$

Substituindo na equação (II):

$$7.680 = C \times (1 + 8i)$$

$$7.680 = \frac{7.200}{(1 + 5i)} \times (1 + 8i)$$

A partir de agora é matemática básica. Vamos resolver algebricamente esta equação e obter o valor da Taxa de Juros.

$$7.680 \times (1 + 5i) = 7.200 \times (1 + 8i)$$

$$7.680 + 38.400i = 7.200 + 57.600i$$

$$7.680 - 7.200 = 57.600i - 38.400i$$

$$480 = 19.200i$$

$$i = \frac{480}{19.200} \rightarrow \boldsymbol{i = 0,025 \ ou \ 2,5\% \ ao \ mês}$$

Gabarito: Alternativa **E**

3. **(FGV / Banestes - 2018) Caso certa dívida não seja paga na data do seu vencimento, sobre ela haverá a incidência de Juros de 12% a.m.. Se essa dívida for quitada com menos de um mês de atraso, o regime utilizado será o de Juros simples.**

Considerando-se o mês comercial (30 dias), se o valor dessa dívida era R$ 3.000,00 no vencimento, para quitá-la com 8 dias de atraso, será preciso desembolsar:

a) R$ 3.096,00
b) R$ 3.144,00
c) R$ 3.192,00
d) R$ 3.200,00
e) R$ 3.252,00

Comentários:

A banca nos questiona qual o valor do Montante necessário para pagar uma dívida de R$ 3.000,00 com 8 dias de atraso a uma Taxa de Juros simples de 12% ao mês (30 dias).

Em Regime de Juros Simples, o Montante é calculado pela seguinte equação.

$$M = C \times (1 + i \times t)$$

Onde,

$M = Montante \ Simples = ?$

$C = Capital = 3.000$

$i = Taxa\ de\ Juros = \ 12\%\ ao\ mês = 0{,}4\%\ ao\ dia = 0{,}004$

$t = tempo = 8\ dias$

Atente-se para a <u>conversão</u> da unidade da Taxa de Juros (mês) para a unidade do tempo de aplicação (dias), pois necessariamente devem coincidir.

$$i = 12\%\ ao\ mês \ \rightarrow\ i = \frac{12\%}{30}\ ao\ dia\ \rightarrow\ \boxed{\boldsymbol{i = 0,4\%\ ao\ dia}}$$

Iremos substituir os valores e calcular o Montante pago pela dívida.

$$M = C \times (1 + i \times t)$$

$$M = 3.000 \times (1 + 0{,}004 \times 8)$$

$$M = 3.000 \times (1 + 0{,}032)$$

$$M = 3.000 \times 1{,}032 \ \rightarrow\ \boldsymbol{M = 3.096}$$

Gabarito: Alternativa **A**

4. **(FGV / SSP AM - 2015) Jorge comprou uma televisão que custava R$ 4.000,00 à vista, pagando em duas parcelas:**

- a primeira, no ato da compra, no valor de R$ 2.200,00;

- a segunda, um mês após a compra, no valor de R$ 2.250,00.

A taxa mensal de juros cobrada de Jorge nessa compra foi de:

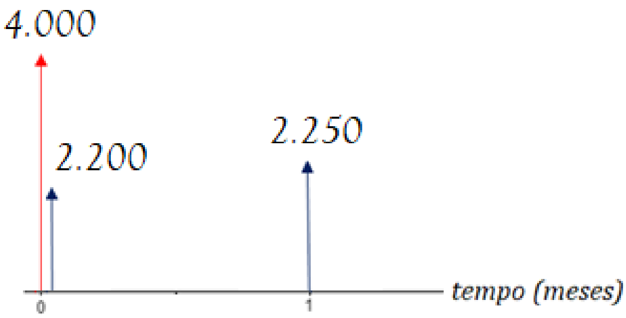
a) 5%
b) 10%
c) 15%
d) 20%
e) 25%

Comentários:

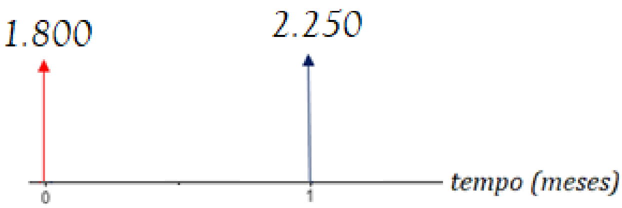
Primeiro, vamos representar <u>graficamente</u> as duas opções de compra para melhor compreensão do enunciado.

- Compra com pagamento à vista no valor de R$ 4.000,00 → **Vermelho**

- Compra a prazo, sendo uma entrada no valor de R$ 2.200,00 e o pagamento de uma parcela adicional no valor de R$ 2.250,00 após 1 mês da data da compra → **Azul**



Se no ato da compra a pessoa deu de entrada R$ 2.200,00, ficou faltando pagar um valor de Capital igual a R$ 1.800,00 (diferença dos valores no tempo "0"), correto?



A pessoa deveria pagar um Capital de R$ 1.800,00. Porém, com a incidência dos Juros Simples, acabou por pagar, 1 mês depois, um Montante de R$ 2.250,00.

Ou seja, o comprador pagou R$ 450,00 de Juros $(2.250 - 1.800)$.

Em Regime de Juros Simples, os **Juros** são calculados pela seguinte equação:

$$J = C \times i \times t$$

Onde,

$J = Juros\ Simples = 450$

$C = Capital = 1.800$

$i = Taxa\ de\ Juros = ?$

$t = tempo = 1\ mês$

Iremos substituir os valores e calcular a taxa mensal de Juros da operação.

$$J = C \times i \times t$$

$$450 = 1.800 \times i \times 1$$

$$i = \frac{450}{1.800} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i = 0,25 \; ou \; 25\% \; ao \; m\hat{e}s}$$

Obs: *"Professor, porque você utilizou a fórmula dos Juros Simples se no enunciado a banca não faz referência qual a modalidade de capitaliação que está sendo adotada?"*

Recorde-se, caro aluno, de que para o período igual a uma unidade de tempo (1 mês no nosso caso), o Montante resultante pelo regime de Juros Simples é igual ao Montante em regime de Juros Compostos.

Resumindo: Para o período igual a 1 unidade de tempo, é indiferente a aplicação da fórmula dos Juros Simples ou Juros Compostos (próxima aula).

Gabarito: Alternativa **E**

5. **(FGV / ISS Cuiabá - 2014) O número de meses necessários para que um investimento feito na poupança triplique de valor (assumindo que esta remunere à taxa de 6% ao ano, no regime de juros simples) é de**

a) 34
b) 200
c) 333
d) 400
e) 50

Comentários:

Quando se trata de Juros Simples, esse é o **estilo mais cobrado pela FGV**. Ela pergunta em quanto tempo um Capital dobra de valor, ou triplica, ou quadriplica, etc.

Vamos resolver essa questão de 2 maneiras para que você escolha a maneira mais confortável e faça a mesma mecânica escolhida no dia da sua prova.

- **Método Algébrico**

O enunciado quer saber o tempo para que um investimento triplique de valor a uma taxa de Juros de 6% ao ano.

No regime de Juros Simples, o Montante é calculado pela seguinte equação:

$$M = C \times (1 + i \times t)$$

Onde,

$M = Montante\ Simples = 3C$

$C = Capital = C$

$i = Taxa\ de\ Juros = 6\%\ ao\ ano = 0{,}06$

$t = tempo = ?$

Perceba que o Montante é igual a triplo do Capital. Vamos substituir os valores e calcular o tempo:

$$M = C \times (1 + i \times t)$$

$$3C = C \times (1 + 0{,}06 \times t)$$

$$3 = 1 + 0{,}06t$$

$$2 = 0{,}06t$$

$$t = \frac{2}{0{,}06} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{t = \frac{2}{0{,}06}\ anos}}$$

Atenção. A banca nos questiona o valor em MESES. Vamos deixar nossa resposta em fração e converter de ano para mês.

Em 1 ano há 12 meses. Logo,

$$t = \frac{2}{0{,}06} \times 12 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{t = 400\ meses}$$

- **Método arbitrando valores**

Neste tipo de questão, podemos arbitrar valores para o Capital para facilitar nossas contas (e o entendimento da questão).

O enunciado nos questiona o número de meses necessários para que um investimento feito na poupança triplique de valor.

Vamos **arbitrar um valor de 100 para o Capital**. Então, o Montante deverá ser 300 (triplo).

A partir disso, podemos aplicar diretamente a fórmula do Montante que irá resultar na mesma resolução da primeira parte ou, podemos calcular os Juros e aplicar a fórmula deste em regime de Juros Simples.

Calculando os Juros dessa aplicação.

$$J = M - C$$

$$J = 300 - 100 \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{J = 200}}$$

Iremos aplicar a fórmula dos Juros e calcular o valor do tempo necessário para o Capital triplicar.

$$J = C \times i \times t$$

$$2\cancel{00} = 1\cancel{00} \times 0{,}06 \times t$$

$$2 = 0{,}06 \times t \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{t = \frac{2}{0{,}06}\ anos}}$$

Atenção. A banca nos questiona o valor em MESES. Vamos deixar nossa resposta em fração e converter de ano para mês.

Em 1 ano há 12 meses. Logo,

$$t = \frac{2}{0{,}06} \times 12 \quad \rightarrow \boldsymbol{t = 400\ meses}$$

Perceba que o final da resolução (e obviamente o resultado) é igual para os 2 métodos de resolução. Muda apenas a ideia de como proceder. Escolha o que você se sinta mais confortável.

Gabarito: Alternativa **D**

2. Juros Compostos

6. **(FGV / BANESTES – 2018) Um capital de R$ 5.000,00 é aplicado à taxa de juros compostos de 24% a.a. com capitalizações bimestrais. Depois de quatro meses de capitalização sem que houvesse qualquer depósito adicional ou qualquer retirada, o proprietário desse montante faz um saque de R$ 608,00 e o restante do dinheiro continuou a ser capitalizado nas mesmas condições.**

Seis meses após o início dessa aplicação, o valor acumulado era:

a) R$ 5.000,00
b) R$ 4.998,00
c) R$ 4.992,00
d) R$ 4.948,00
e) R$ 4.942,00

Comentários:

ESTA CAI NA PROVA!

Esta é uma **questão bem completa** sobre Juros Compostos que eu acredito que cairá na sua prova. Então, mesmo que ela tenha um pouco mais de dificuldade, coloquei-a por primeiro para que você fique bem atento à resolução.

Primeiro passo é <u>converter a Taxa Nominal para a Taxa Efetiva</u>.

Taxa Nominal é a taxa de juros cuja unidade de tempo não coincide com a unidade de tempo do período de capitalização. Observe que a taxa fornecida no enunciado é uma taxa nominal.

$$i_{Nominal} = 24\% \ ao \ ano \ capitalizada \ bimestralmente$$

Nunca resolva um exercício usando a taxa nominal. Sempre devemos passar para a unidade de tempo do período de capitalização. Então tenha em mente: "**quem manda é o período de capitalização**".

E como passamos da unidade de tempo do período da taxa nominal (ano) para a unidade de tempo do período de capitalização (bimestre)?

Basta fazermos uma simples divisão/multiplicação.

Em 1 ano há 6 bimestres. Então, a Taxa Efetiva bimestral será um sexto da taxa anual.

$$i_{Efetiva \ Bimestral} = \frac{24\%}{6} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{i_{Efetiva \ Bimestral} = 4\% \ a.b.}}$$

- ✓ Essa será a taxa que devemos utilizar no exercício.

Depois desse primeiro passo (perceba que a explicação é extensa para que você possa entender o passo a passo. Mas, na hora da prova, você consegue fazer essa passagem em apenas uma linha ou até mesmo fazer a divisão "de cabeça"), iremos calcular o Montante após 4 meses de aplicação.

"Depois de quatro meses de capitalização sem que houvesse qualquer depósito adicional ou qualquer retirada, o proprietário desse montante faz um saque de R$ 608,00..."

Em regime de Juros Compostos, o Montante é calculado pela seguinte equação:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

Onde,

$M = Montante = ?$

$C = Capital = 5.000$

$i = Taxa\ de\ Juros = 4\%\ ao\ bimestre = 0{,}04$

$t = tempo = 4\ meses = 2\ bimestres$

Atente-se para a conversão da unidade do tempo de aplicação (meses) para a unidade da taxa de juros (bimestre) pois **necessariamente** devem coincidir. Em 4 meses há 2 bimestres.

Vamos substituir os valores e calcular o Montante.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 5.000 \times (1 + 0{,}04)^2$$

$$M = 5.000 \times (1{,}04)^2$$

$$M = 5.000 \times 1{,}0816 \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{M = 5.408}}$$

"o proprietário desse montante faz um saque de R$ 608,00..."

Logo, ainda restará em mãos:

$$valor = 5.408 - 608 \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{valor = 4.800}}$$

"o restante do dinheiro continuou a ser capitalizado nas mesmas condições"

Ou seja, esse valor de R$ 4.800 continuará aplicado por mais (2 meses=1bimestre) a uma taxa de juros de 4% ao bimestre.

Observe que a aplicação total ocorre em 6 meses. Porém, como já se passaram 4 meses, ainda **restam 2 meses de aplicação**.

Iremos aplicar novamente a fórmula do Montante em regime de Juros Compostos e calcular o Montante final desta aplicação.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

Onde,

$M = Montante = ?$

$C = Capital = 4.800$

$i = Taxa\ de\ Juros = 4\%\ ao\ bimestre = 0{,}04$

$t = tempo = 2\, meses = 1\, bimestre$

Vamos substituir os valores e calcular o Montante.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 4.800 \times (1 + 0{,}04)^1$$

$$M = 4.800 \times 1{,}04 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M = 4.992}$$

Gabarito: Alternativa **C**

7. (FGV / BANESTES - 2018) Um capital de R$ 2.000,00 é aplicado a juros compostos de 10% ao mês. Depois de 3 meses de capitalização sem que houvesse qualquer retirada, o detentor desse montante faz um saque de R$ 562,00 e o restante do dinheiro continua a ser capitalizado nas mesmas condições.

Dois meses após essa retirada, o valor acumulado na aplicação é:

a) R$ 2.466,00
b) R$ 2.480,00
c) R$ 2.500,00
d) R$ 2.541,00
e) R$ 2.626,00

Comentários:

Perceba que a **FGV** adora este estilo de cobrança. Vamos por parte.

Um capital de R$ 2.000,00 é aplicado a juros compostos de 10% ao mês durante 3 meses. Iremos aplicar a fórmula do Montante em regime de Juros Compostos e calcular o valor deste.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 2.000 \times (1 + 0{,}1)^3$$

$$M = 2.000 \times 1{,}1^3$$

$$M = 2.000 \times 1{,}331 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M = 2.662}}$$

"o detentor desse montante faz um saque de R$ 562,00"

Então, ainda restará nas mãos do detentor um valor igual a:

$$valor = 2.662 - 562 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{valor = 2.100}}$$

"o restante do dinheiro continua a ser capitalizado nas mesmas condições por 2 meses."

Ou seja, esse valor de R$ 2.100 continuará aplicado por mais 2 meses a uma taxa de juros de 10% ao mês (mesmas condições).

Sendo assim, o **Montante** final será:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 2.100 \times (1 + 0{,}1)^2$$

Observe que o Capital desta segunda operação é o valor restante que continua na mão do dententor do dinheiro. Ele obteve um Montante de R$ 2.662 e retirou R$ 562. Logo, o que continua aplicado é igual a diferença entre o que ele obteve e o que ele retirou, isto é, R$ 2.100.

Calculando o Montante final:

$$M = 2.100 \times (1 + 0{,}1)^2$$

$$M = 2.100 \times 1{,}1^2$$

$$M = 2.100 \times 1{,}21 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M = 2.541}$$

Gabarito: Alternativa **D**

8. (FGV / BANESTES – 2018) Um capital de R$ 2.662,00 é capitalizado sob regime de juros compostos, ao longo de 4 meses, à taxa efetiva de 10% ao mês, produzindo um montante M.

Para que R$ 2.000,00 produzam o mesmo montante M, ele deve ser capitalizado nessas mesmas condições durante um período igual a:

a) 8 meses
b) 7 meses
c) 6 meses
d) 4 meses
e) 3 meses

Comentários:

Um capital C de R$ 2.662,00 é capitalizado sob regime de juros compostos, ao longo de 4 meses, à taxa efetiva de 10% ao mês, produzindo um montante M.

Iremos aplicar a fórmula do Montante em regime de Juros Compostos e calcular M.

$$M = C \times (1+i)^t$$

$$M = 2.662 \times (1+0{,}1)^4 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M = 2.662 \times 1{,}1^4}}$$

Não faça essa conta agora. Segure o resultado e deixe em função da potência de 1,1.

Para que R$ 2.000,00 produzam o mesmo montante M (calculado acima), ele deve ser capitalizado nessas mesmas condições (taxa de juros de 10% ao mês) durante um período igual a t meses.

Vamos utilizar novamente a **fórmula do Montante** em Regime de Juros Compostos e calcular o valor de t.

$$M = C \times (1+i)^t$$

$$2.662 \times 1{,}1^4 = 2.000 \times (1+0{,}1)^t$$

$$\frac{2.662}{2.000} \times 1{,}1^4 = 1{,}1^t$$

$$1{,}331 \times 1{,}1^4 = 1{,}1^t$$

Observe que 1,331 é o resultado de uma potência conhecida.

$$1{,}331 = 1{,}1^3$$

Vamos substituir na equação acima e continuar a manipulação algébrica para calcular o valor de t.

$$1{,}331 \times 1{,}1^4 = 1{,}1^t$$

$$1{,}1^3 \times 1{,}1^4 = 1{,}1^t$$

$$1{,}1^{3+4} = 1{,}1^t$$

$$1{,}1^7 = 1{,}1^t \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{t = 7\ meses}$$

Gabarito: Alternativa **B**

9. **(FGV / BANESTES – 2018) Certa empresa financeira do mundo real cobra juros compostos de 10% ao mês para os empréstimos pessoais. Gustavo obteve nessa empresa um empréstimo de 6.000 reais para pagamento, incluindo os juros, três meses depois.**

O valor que Gustavo deverá pagar na data do vencimento é:

a) 6.600 reais

b) 7.200 reais
c) 7.800 reais
d) 7.986 reais
e) 8.016 reais

Comentários:

Gustavo obtém o empréstimo em Regime de Juros Compostos. Nesse regime, o Montante é calculado pela seguinte equação:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

Onde,

$M = Montante = ?$

$C = Capital = 6.000$

$i = Taxa\ de\ Juros = 10\%\ ao\ mês = 0{,}1$

$t = tempo = 3\ meses$

Vamos substituir os valores e calcular o Montante devido por Gustavo.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 6.000 \times (1 + 0{,}1)^3$$

$$M = 6.000 \times 1{,}1^3$$

$$M = 6.000 \times 1{,}331 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M = 7.986}$$

Gabarito: Alternativa **D**

10. (FGV / SEFAZ RO – 2018) A taxa efetiva trimestral, que é equivalente a uma taxa nominal de 120% ao ano, capitalizados mensalmente, é igual a

a) 21,78%
b) 30,00%
c) 33,10%
d) 46,41%
e) 50,00%

Comentários:

Primeiro passo é converter a Taxa Nominal para a Taxa Efetiva.

$$i_{Nominal} = 120\% \; ao \; ano \; capitalizada \; mensalmente$$

Em 1 ano há 12 meses. Então, a Taxa Efetiva mensal será a taxa anual dividida por 12.

$$i_{Efetiva\ Mensal} = \frac{120\%}{12} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{i_{Efetiva\ Mensal} = 10\%\ a.m.}}$$

Segundo passo é calcular a Taxa Efetiva trimestral equivalente à Taxa Efetiva mensal de 10%.

Ou seja, uma taxa efetiva mensal capitalizada por 3 meses (1 trimestre) resultará em que taxa efetiva trimestral?

Para acharmos a taxa equivalente tomamos como base a potenciação.

$$(1 + i_{mensal})^3 = (1 + i_{trimestral})$$

$$(1 + 0{,}1)^3 = (1 + i_{trimestral})$$

$$1{,}1^3 = 1 + i_{trimestral}$$

$$1{,}331 = 1 + i_{trimestral}$$

$$i_{trimestral} = 1{,}331 - 1 \rightarrow \boldsymbol{i_{trimestral} = 0{,}331 \;\; ou \;\; 33{,}10\%}$$

Gabarito: Alternativa **C**

11. (FGV / BANESTES – 2018) Um contrato de empréstimo é firmado com taxa efetiva de juros, no regime de capitalização composta, de 44% ao bimestre. Entretanto, a redação do contrato não faz referência a qualquer taxa efetiva e sim a uma taxa trimestral com capitalização mensal de:

a) 60,0%
b) 61,6%
c) 62,5%
d) 66,0%
e) 66,6%

Comentários:

Observe que a banca nos questiona o valor da taxa trimestral com capitalização mensal, isto é, o valor da **Taxa Nominal**.

Lembrando que Taxa Nominal é a taxa de juros cuja unidade de tempo **não coincide** com a unidade de tempo do período de capitalização.

Perceba que a capitalização é mensal. Então, primeiramente, vamos calcular a taxa efetiva mensal e depois calcular a Taxa Nominal.

Um contrato de empréstimo é firmado com taxa efetiva de juros, no regime de capitalização composta, de 44% ao bimestre. Então, vamos calcular a taxa efetiva mensal que capitalizada por 2 meses (1 bimestre) será equivalente a taxa de 44% ao bimestre.

$$(1 + i_{mensal})^2 = (1 + i_{bimestral})$$

$$(1 + i_{mensal})^2 = (1 + 0{,}44)$$

$$(1 + i_{mensal})^2 = 1{,}44$$

$$1 + i_{mensal} = \sqrt{1{,}44}$$

$$1 + i_{mensal} = 1{,}2$$

$$i_{mensal} = 1{,}2 - 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{i_{mensal} = 0{,}2 \ \ ou \ \ 20\%}}$$

De posse da Taxa Efetiva, vamos calcular a Taxa nominal (taxa trimestral com capitalização mensal) pedida pela banca.

Estamos acostumados, nos exercícios, a transformar a Nominal em Efetiva. Porém, **essa questão nos pede a "volta" dessa transformação**.

Para transformar taxa nominal em efetiva (ou vice-versa) fazemos uma simples divisão/multiplicação.

Em 1 trimestre há 3 meses. Então, a taxa trimestral com capitalização mensal será igual a:

$$i_{Nominal} = 3 \times 20\%$$

$$\boldsymbol{i_{Nominal} = 60\% \ ao \ trimestre \ capitalizada \ mensalmente}$$

Gabarito: Alternativa **A**

12. (FGV / BANESTES – 2018) Um contrato de empréstimo é firmado com taxa anual de juros de 24% capitalizados trimestralmente sob regime de juros compostos.

A taxa semestral efetiva nessa contratação é:

a) 12,00%

b) 12,25%
c) 12,36%
d) 12,44%
e) 12,56%

Comentários:

Primeiro passo é converter a Taxa Nominal para a Taxa Efetiva.

Taxa Nominal é a taxa de juros cuja unidade de tempo **não coincide** com a unidade de tempo do período de capitalização. Observe que a taxa fornecida no enunciado é uma taxa nominal.

$$i_{Nominal} = 24\%\ ao\ ano\ capitalizada\ trimestralmente$$

Em 1 ano há 4 trimestres. Então, a Taxa Efetiva trimestral será igual a:

$$i_{Efetiva\,Trimestral} = \frac{24\%}{4} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{i_{Efetiva\,Trimestral} = 6\%\ a.t.}}$$

Segundo passo é calcular a Taxa Efetiva semestral equivalente à Taxa Efetiva trimestral de 6%.

Ou seja, uma taxa efetiva trimestral capitalizada por 2 trimestres (1 semestre) resultará em que taxa efetiva semestral?

Para acharmos a taxa equivalente tomamos como base a **potenciação**.

$$(1 + i_{trimestral})^2 = (1 + i_{semestral})$$

$$(1 + 0{,}06)^2 = (1 + i_{semestral})$$

$$1{,}06^2 = 1 + i_{semestral}$$

$$1{,}1236 = 1 + i_{semestral}$$

$$i_{semestral} = 1{,}1236 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_{semestral} = 0{,}1236\ \ ou\ \ 12{,}36\%}$$

Gabarito: Alternativa **C**

13. (FGV / BANESTES - 2018) No sistema de juros compostos, uma taxa de k% ao trimestre, com capitalização bimestral, corresponde a uma taxa efetiva quadrimestral de:

a) $(1 + 2k/3)^2$
b) $(1 + k/3)^2 - 1$

c) $(1+2k/300)^2$
d) $(1+2k/300)^2-1$
e) $1-(1+2k/300)^2$

Comentários:

Primeiro passo é converter a Taxa Nominal para a Taxa Efetiva.

Taxa Nominal é a taxa de juros cuja unidade de tempo **não coincide** com a unidade de tempo do período de capitalização. Observe que a taxa fornecida no enunciado é uma taxa nominal.

$$i_{Nominal} = k\% \ ao \ trimestre \ capitalizada \ bimestralmente$$

Como trimestre e bimestre não são múltiplos, vamos fazer uma regra de três simples baseda **em meses** para conversão.

Lembrando que para passar da Taxa Nominal para a Taxa Efetiva, tomamos como base a proporcionalidade, isto é, passamos de uma para a outra com uma simples divisão/multiplicação.

$$k/100 \quad - \quad 3 \ meses$$

$$i \quad - \quad 2 \ meses$$

Fazendo o produto do meio sendo igual ao produto dos extremos (multiplicando cruzado):

$$\frac{k}{100} \times 2 = 3i \quad \rightarrow \quad i = \frac{2k}{300}$$

Ou seja, a Taxa Efetiva i é igual a:

$$i = \frac{2k}{300} \ ao \ bimestre \ capitalizada \ bimestralmente$$

Segundo passo é calcular a Taxa Efetiva quadrimestral equivalente à Taxa Efetiva bimestral de $\frac{2k}{300}$.

Ou seja, a taxa efetiva bimestral de $\frac{2k}{300}$ capitalizada por 2 bimestres (1 quadrimestre) resultará em que taxa efetiva quadrimestral?

Para acharmos a taxa equivalente tomamos como base a **potenciação**.

$$(1 + i_{bimestral})^2 = (1 + i_{quadrimestral})$$

$$\left(1 + \frac{2k}{300}\right)^2 = (1 + i_{quadrimestral}) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_{quadrimestral} = \left(1 + \frac{2k}{300}\right)^2 - 1}$$

Observe que esta questão complicou um pouco, pois, diferente do que estamos acostumados, a banca deu uma Taxa Nominal onde os períodos (da taxa e da capitalização) não eram múltiplos exatos.

Quando isto ocorrer, reduza a um denominador comum (geralmente será o "mês") e faça a regra de três para encontrar a Taxa Efetiva.

Gabarito: Alternativa **D**

14. (FGV / BANESTES – 2018) João recebeu sua fatura do cartão de crédito no valor de R$ 4.000,00 e, no dia do vencimento, pagou o valor mínimo exigido (que corresponde a 15% do valor total). O restante foi quitado um mês depois.

Se a administradora do cartão de João cobra juros de 216% ao ano com capitalização mensal, sob regime de juros compostos, então o valor pago no ato da liquidação da dívida foi:

a) R$ 4.000,00
b) R$ 4.012,00
c) R$ 4.100,00
d) R$ 4.120,00
e) R$ 4.320,00

Comentários:

João recebeu sua fatura do cartão de crédito no valor de R$ 4.000,00 e, no dia do vencimento, pagou o valor mínimo exigido (que corresponde a 15% do valor total).

Se João pagou 15%, então, ele deixou de pagar 85%. Logo, falta pagar um Capital C igual a:

$$C = \frac{85}{100} \times 4.000 \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{C = 3.400}}$$

Esse valor que falta a pagar foi quitado 1 mês depois sendo submetido a uma taxa de juros de 216% ao ano com capitalização mensal, sob regime de juros compostos.

Primeiro passo é converter a Taxa Nominal para a Taxa Efetiva.

Taxa Nominal é a taxa de juros cuja unidade de tempo **não coincide** com a unidade de tempo do período de capitalização. Observe que a taxa fornecida no enunciado é uma taxa nominal.

$$i_{Nominal} = 216\% \ ao \ ano \ capitalizada \ mensalmente$$

Em 1 ano há 12 meses. Então, a Taxa Efetiva mensal igual a:

$$i_{Efetiva \ mensal} = \frac{216\%}{12} \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{i_{Efetiva \ mensal} = 18\% \ a.m.}}$$

✓ Essa será a taxa que devemos utilizar no exercício.

Sendo assim, 1 mês depois, João pagará o Montante igual a:

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 3.400 \times (1 + 0{,}18)^1$$

$$M = 3.400 \times 1{,}18 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M = 4.012}$$

Gabarito: Alternativa **B**

15. (FGV / ISS Niterói - 2015) Um empréstimo por dois meses utilizando o regime de juros compostos de 10% ao mês equivale a um empréstimo utilizando o regime de juros simples, pelo mesmo período, de:

a) 9,0% ao mês
b) 9,5% ao mês
c) 10,0% ao mês
d) 10,5% ao mês
e) 11,0% ao mês

Comentários:

ESTA CAI NA PROVA!

Este tipo de questão é bem **estilo FGV**. O enunciado parece um pouco confuso. Mas o que a banca quer saber qual é a taxa em regime de Juros Simples que incide sobre um Capital C e produz o mesmo Montante M que uma aplicação em regime de Juros Compostos a 10% ao mês.

Ainda ficou **confuso**? Vamos resolver **matematicamente** e tudo se esclarecerá.

Iremos arbitrar um valor de 100 para o Capital e calcularemos o valor do Montante dois meses após utilizando o regime de juros compostos de 10% ao mês.

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$M = 100 \times (1 + 0{,}1)^2$$

$$M = 100 \times 1{,}1^2$$

$$M = 100 \times 1{,}21 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M = 121}}$$

Ou seja, um Capital de 100 submetido a Juros de 10% ao mês, durante 2 meses, em regime de Juros Compostos, resultou em um Montante de 121.

Pois bem, a banca quer saber qual a taxa de Juros em regime Simples que, quando aplicada sobre um Capital de 100 produzirá um Montante de 121 (nos mesmos 2 meses).

Creio que agora ficou mais claro, não é? Vamos reler o primeiro parágrafo.

A banca quer saber qual é a taxa em regime de Juros Simples que incide sobre um Capital C e produz o mesmo Montante M que uma aplicação em regime de Juros Compostos a 10% ao mês durante os 2 meses.

Como arbitramos valores, temos $C = 100$ e $M = 121$. Então, iremos aplicar a fórmula do Montante em regime de Juros Simples e calcular a Taxa de Juros que, aplicada sobre o Capital 100 por 2 meses, produzirá um Montante de 121.

$$M = C \times (1 + i \times t)$$

$$121 = 100 \times (1 + i \times 2)$$

$$\frac{121}{100} = 1 + 2i$$

$$1{,}21 = 1 + 2i$$

$$2i = 1{,}21 - 1$$

$$2i = 0{,}21$$

$$i = \frac{0{,}21}{2} \rightarrow \boldsymbol{i = 0{,}105\ ou\ 10{,}5\%\ ao\ mês}$$

Gabarito: Alternativa **D**

16. **(FGV / ISS Niterói - 2015) Um empréstimo por dois anos utilizando o regime de juros simples de 150% ao ano equivale a um empréstimo utilizando o regime de juros compostos, pelo mesmo período, de:**

a) 100% ao ano
b) 125% ao ano
c) 150% ao ano
d) 175% ao ano
e) 200% ao ano

Comentários:

Mesmo estilo de cobrança que à questão acima. Na questão acima, arbitramos o valor de 100 para o Capital. Nesta, iremos utilizar a própria incógnita e trabalhar **algebricamente**.

Um empréstimo por dois anos utilizando o regime de juros simples de 150% ao ano resulta em um Montante igual a:

$$M = C \times (1 + i \times t)$$

$$M = C \times (1 + 1{,}5 \times 2)$$

$$M = C \times (1 + 3) \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M = 4C}}$$

"equivale a um empréstimo utilizando o regime de juros compostos, pelo mesmo período, de:"

$$M = C \times (1 + i)^t$$

$$4\cancel{C} = \cancel{C} \times (1 + i)^2$$

$$4 = (1 + i)^2$$

$$1 + i = \sqrt{4}$$

$$1 + i = 2$$

$$i = 2 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i = 1 \ ou \ 100\% \ ao \ ano}$$

Gabarito: Alternativa **A**

3. Taxa Real, Aparente, e de Inflação

17. (FGV / BANESTES – 2018) O IGP-M (Índice Geral de Preços do Mercado) é um indicador da variação dos preços calculado pela Fundação Getulio Vargas e divulgado mensalmente. O IGP-M costuma ser utilizado como referência para o cálculo de reajuste dos contratos de aluguel de imóveis.

O contrato de aluguel de Ivo prevê reajustes anuais com base no IGP-M acumulado nesse período. Após um ano de contrato, o valor acumulado desse índice foi 7,73%.

Se, no mesmo período, a inflação acumulada foi de 5%, então o aumento do aluguel, descontada a inflação, foi de:

a) 2,6%
b) 2,7%
c) 2,9%

d) 3,4%
e) 3,6%

Comentários:

Observe que o enunciado nos questiona o valor da taxa descontada a inflação, isto é, o valor da Taxa real.

Lembrando que **Taxa real** é a taxa de juros em que **são descontados** os efeitos inflacionários.

Iremos utilizar a equação de correlação entre as taxas e calcular o aumento real do aluguel.

$$(1 + i_a) = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

Onde,

$i_a = Taxa\ aparente = 7{,}73\% = 0{,}0773$

$i_r = Taxa\ real = ?$

$i_i = Taxa\ de\ inflação = 5\% = 0{,}05$

Iremos substituir os valores e calcular a Taxa de inflação.

$$(1 + i_a) = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

$$(1 + 0{,}0773) = (1 + i_r) \times (1 + 0{,}05)$$

$$1{,}0773 = (1 + i_r) \times 1{,}05$$

$$(1 + i_r) = \frac{1{,}0773}{1{,}05}$$

$$1 + i_r = 1{,}026$$

$$i_r = 1{,}026 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_r = 0{,}026\ \ ou\ \ 2{,}6\%\ no\ período}$$

Gabarito: Alternativa **A**

18. (FGV / Pref. Niterói RJ - 2015) Uma aplicação de R$ 10.000,00, após dois meses, resultou em um montante de R$ 14.210,00. Considerando a incidência de imposto sobre o rendimento de 30% e a taxa mensal de inflação de 10%, a taxa de juros real durante o período de aplicação foi:

a) 7,0%
b) 7,5%
c) 8,0%

d) 8,5%
e) 9,0%

Comentários:

Esta questão é um pouco mais complicada que as demais por alguns pequenos detalhes. E, acredito eu, será uma questão neste estilo que cairá na sua prova.

Primeiramente, vamos calcular o **Montante de fato** desta aplicação, pois, afinal, em cima do rendimento houve a incidência de um imposto de 30%.

O rendimento (Juros) é calculado pela diferença do Montante recebido menos o Capital aplicado.

$$J = 14.210 - 10.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J = 4.210}}$$

Em cima desse valor houve a incidência de um imposto no valor de 30%.

$$imposto = \frac{30}{100} \times 4.210 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{imposto = 1.263}}$$

Logo, os redimentos (Juros) que serão recebidos de fato, serão iguais a:

$$J_{de\ fato} = J - imposto$$

$$J_{de\ fato} = 4.210 - 1.263 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J_{de\ fato} = 2.947}}$$

De posse dos Juros que, de fato, foi recebido, podemos calcular o Montante que efetivamente foi recebido pela aplicação.

$$M_{de\ fato} = C + J_{de\ fato}$$

$$M_{de\ fato} = 10.000 + 2.947 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M_{de\ fato} = 12.947}}$$

Agora, de posse do Montante que foi efetivamente recebido e do Capital aplicado, utilizaremos a equação de Fisher adaptada e encontraremos a Taxa real desta operação durante o período.

Vamos passo a passo. A equação de Fisher adaptada é:

$$\frac{M}{C} = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

PEGADINHA

Observe o "pequeno grande" detalhe da questão. O enunciado nos questiona o valor da taxa de juros real do **período** da aplicação. E o período da aplicação é de 2 meses. Todavia, <u>a taxa de inflação fornecida no enunciado é mensal</u>.

Então, ou você calcula a taxa bimestral de inflação para aplicar na fórmula, ou "expande" a fórmula vista acima conforme estudamos na teoria em "indo mais a fundo". Vejamos:

$$\frac{M_{de\ fato}}{C} = (1 + i_r) \times (1 + i_i) \times (1 + i_i)$$

Percaba que o Montante na fórmula deve ser o Montante efetivamente recebido, pois, como vimos, houve a incidência de um imposto em cima dos rendimentos. E, perceba também, que a taxa de inflação deve ser capitalizada (expandida) para 2 períodos, uma vez que devemos encontrar a taxa real de juros do período (2 meses) e a taxa de inflação fornecida é mensal.

Substituindo os valores e calculando a taxa real:

$$\frac{M_{de\ fato}}{C} = (1 + i_r) \times (1 + i_i) \times (1 + i_i)$$

$$\frac{12.947}{10.000} = (1 + i_r) \times (1 + 0{,}1) \times (1 + 0{,}1)$$

$$1{,}2947 = (1 + i_r) \times 1{,}1 \times 1{,}1$$

$$1{,}2947 = (1 + i_r) \times 1{,}21$$

$$(1 + i_r) = \frac{1{,}2947}{1{,}21}$$

$$1 + i_r = 1{,}07$$

$$i_r = 1{,}07 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_r = 0{,}07\ ou\ 7\%\ ao\ mês}$$

Gabarito: Alternativa **A**

19. (FGV / ISS Niterói RJ - 2015) Uma aplicação de R$ 10.000,00 foi resgatada ao final de um ano gerando um montante de R$ 12.000,00. Nas datas de aplicação e resgate, os números índices de preços - base fixa eram 200 e 210, respectivamente.

A taxa real de juros recebida nessa aplicação durante o ano foi, aproximadamente:

a) 5%
b) 7%
c) 10%
d) 14%
e) 20%

Comentários:

Quando a banca fornece os números índices de preço (nessas questões de Matemática Financeira) é para que você calcule a **taxa de inflação do período**.

Inflação é, resumidamente, o aumento generalizado dos preços. E com os números índices em dois momentos distintos podemos calcular a taxa de inflação no período. Vejamos:

$$200 \times (1 + i_i) = 210$$

O índice 200 capitalizado pela taxa de inflação resulta no índice 210. Assim, calculamos a taxa de inflação.

$$200 \times (1 + i_i) = 210$$

$$200 \times (1 + i_i) = 210$$

$$(1 + i_i) = \frac{210}{200}$$

$$1 + i_i = 1{,}05$$

$$i_i = 1{,}05 - 1 \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{i_i = 0{,}05 \; ou \; 5\%}}$$

De posse da taxa inflação, utilizamos a equação de Fisher adaptada e calculamos o valor da taxa real de juros.

$$\frac{M}{C} = (1 + i_r) \times (1 + i_i)$$

$$\frac{12.000}{10.000} = (1 + i_r) \times (1 + 0{,}05)$$

$$1{,}2 = (1 + i_r) \times 1{,}05$$

$$(1 + i_r) = \frac{1{,}2}{1{,}05}$$

$$1 + i_r = 1{,}1428$$

$$i_r = 1{,}1428 - 1 \quad \rightarrow \boldsymbol{i_r = 0{,}1428 \; ou \; 14{,}28\%}$$

Gabarito: Alternativa **D**

4. CUSTO REAL EFETIVO

20. (FGV / ALERO – 2018) Uma empresa solicitou um financiamento de R$ 50.000,00 a ser pago em um ano. O banco credor cobra uma taxa de juros compostos de 20% a.a. com capitalizações semestrais. No ato da liberação do dinheiro, a empresa pagou 2% sobre o total (principal mais juros) a título de impostos. Dessa forma, o valor liberado pelo banco foi menor do que o solicitado.

O custo real efetivo dessa transação foi de

a) 22,0% a.a.
b) 23,0% a.a.
c) 23,5% a.a.
d) 24,0% a.a.
e) 24,5% a.a.

Comentários:

ESTA CAI NA PROVA!

Perceba que, nessa questão, para calcularmos o valor do Capital efetivamente recebido pela empresa, teremos que, primeiro, calcular o Montante, uma vez que, na hora da obtenção do empréstimo, há um pagamento de 2% sobre o total (principal mais juros) a título de impostos.

Então, vamos calcular o Montante pago pela empresa ao final de 1 ano.

<u>Primeiro passo</u> é converter a taxa nominal em taxa efetiva.

$$i = 20\% \ ao \ ano \ capitalizados \ semestralmente$$

$$i = 10\% \ ao \ semestre \ capitalizados \ semestralmente$$

Ou, simplesmente,

$$\boxed{\boldsymbol{i = 10\% \ ao \ semestre}}$$

Trabalhamos exaustivamente essa conversão na última aula. Se você não entendeu essa passagem, é uma boa hora para voltar na aula de Juros Compostos e **revisar** o assunto.

Continuando com o cálculo do Montante.

$$M = C \times (1+i)^t$$

$$M = 50.000 \times (1+0{,}1)^2$$

Atente-se para a conversão da unidade do tempo de aplicação (ano) para a unidade da taxa de juros (semestre). Em 1 ano há 2 semestres.

$$M = 50.000 \times (1{,}1)^2$$

$$M = 50.000 \times 1{,}21 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M = 60.500}}$$

Neste ponto, podemos calcular o valor do Capital efetivamente recebido pela empresa na data da obtenção do empréstimo. No ato da liberação do dinheiro, a empresa pagou 2% sobre o total (principal mais juros) a título de impostos.

Logo, ela recebeu efetivamente um Capital igual a:

$$C_{ef} = 50.000 - \frac{2}{100} \times 60.500$$

$$C_{ef} = 50.000 - 1.210 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{C_{ef} = 48.790}}$$

E, por fim, calculamos a taxa efetiva de juros (custo efetivo) no período da operação.

$$M = C_{ef} \times \left(1 + i_{ef}\right)$$

$$60.500 = 48.790 \times \left(1 + i_{ef}\right)$$

$$\left(1 + i_{ef}\right) = \frac{60.500}{48.790}$$

$$1 + i_{ef} = 1{,}24$$

$$i_{ef} = 1{,}24 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i_{ef} = 0{,}24 \;\; ou \;\; 24\%}$$

Gabarito: Alternativa **D**

5. DESCONTOS

21. (FGV / BANESTES - 2018) Um título de valor nominal igual a R$ 12.000,00 sofre desconto comercial simples dois meses antes do seu vencimento.

Se a taxa de desconto é de 54% ao ano, o valor líquido recebido nessa operação corresponde a:

a) R$ 1.080,00
b) R$ 2.160,00
c) R$ 5.520,00
d) R$ 10.920,00
e) R$ 11.460,00

Comentários:

Vamos aplicar diretamente a fórmula do Valor Atual no Desconto Comercial Simples e calcular o valor líquido recebido.

$$A = N \times (1 - i \times t)$$

Onde,

$A = Valor\ Atual = ?$

$N = Valor\ Nominal = 12.000$

$i = taxa\ de\ desconto = 54\%\ ao\ ano$

$t = tempo\ de\ antecipação = 2\ meses$

Atente-se para a conversão da unidade da Taxa de desconto (ano) para a unidade do tempo de antecipação (meses), pois **necessariamente** devem coincidir. Em 1 ano há 12 meses. Logo,

$$i_{mensal} = \frac{i_{anual}}{12}$$

$$i_{mensal} = \frac{54\%}{12} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{i_{mensal} = 4,5\%\ ao\ mês = 0,045}}$$

Iremos substituir os valores e calcular o valor líquido.

$$A = N \times (1 - i \times t)$$

$$A = 12.000 \times (1 - 0,045 \times 2)$$

$$A = 12.000 \times (1 - 0,09)$$

$$A = 12.000 \times 0{,}91 \quad \rightarrow \boldsymbol{A = 10.920}$$

Poderíamos resolver também, primeiramente, calculando o valor do Desconto Comercial Simples.

$$D_{CS} = N \times i \times t$$

$$D_{CS} = 12.000 \times 0{,}045 \times 2 \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{D_{CS} = 1.080}}$$

E de posse do Desconto e do Valor Nominal, calcularíamos o Valor Atual.

$$D_{CS} = N - A$$

$$1.080 = 12.000 - A$$

$$A = 12.000 - 1.080 \quad \rightarrow \boldsymbol{A = 10.920}$$

Gabarito: Alternativa **D**

22. (FGV / BANESTES – 2018) Uma instituição financeira realiza operações de desconto simples comercial à taxa de 4% a.m.. Um cliente desse banco descontou uma nota promissória cinco meses antes do seu vencimento.

A taxa de desconto efetiva linear é:

a) 4,5% a.m.
b) 5,0% a.m.
c) 5,2% a.m.
d) 5,5% a.m.
e) 6,0% a.m.

Comentários:

A taxa efetiva do Desconto Comercial Simples é igual a:

$$i_{ef} = \frac{i_{CS}}{1 - i_{CS} \times t}$$

Onde,

$i_{CS} = taxa\ de\ desconto\ (comercial\ simples) = 4\%\ ao\ mês = 0{,}04$

$t = período\ de\ antecipação = 5\ meses$

Vamos substituir o valor da taxa na equação e calcular a taxa efetiva mensal.

$$i_{ef} = \frac{i_{CS}}{1 - i_{CS} \times t}$$

$$i_{ef} = \frac{0{,}04}{1 - 0{,}04 \times 5}$$

$$i_{ef} = \frac{0{,}04}{1 - 0{,}2}$$

$$i_{ef} = \frac{0{,}04}{0{,}8} \rightarrow \boldsymbol{i_{ef} = 0{,}05 \ \ ou \ \ 5\% \ a.m.}$$

Gabarito: Alternativa **B**

23. (FGV / BANESTES – 2018) Um título de crédito com valor nominal de R$ 9.000,00 foi descontado 20 dias antes do seu vencimento, segundo as regras do desconto bancário, à taxa simples de desconto de 6% ao mês.

Sobre essa operação, houve cobrança de IOF (Imposto sobre Operações Financeiras), com alíquota simples de 3% ao ano. Houve ainda a cobrança de uma taxa fixa de serviço bancário de 2%.

Sabendo-se que essas duas cobranças incidiram sobre o valor nominal do título, e considerando-se o ano comercial, o valor descontado foi:

a) R$ 8.190,00
b) R$ 8.437,50
c) R$ 8.445,00
d) R$ 8.485,50
e) R$ 8.512,00

Comentários:

Minha aposta é uma questão na sua prova no mesmo estilo desta. A FGV está começando a "fugir" das questões que são puramente aplicação de fórmulas de Desconto.

Observe que o Valor Descontado (Valor Atual) será igual ao Valor Nominal menos o Desconto Comercial Simples menos o IOF e menos, também, a taxa final de serviço bancário.

$$\boldsymbol{A = N - D_{CS} - IOF - taxa}$$

Vamos calcular separadamente cada uma dessas incógnitas.

1. D_{CS}

Um título de crédito com valor nominal N de R$ 9.000,00 foi descontado 20 dias antes do seu vencimento, segundo as regras do desconto bancário, à taxa simples de desconto de 6% ao mês.

Atente-se, primeiramente, para a conversão da unidade do período (dias) para a unidade da taxa de desconto (mês), pois necessariamente devem coincidir. 20 dias equivalem a 20/30 do mês, ou seja, 2/3 do mês.

Iremos aplicar diretamente a fórmula do Desconto Comercial Simples e calcular seu valor.

$$D_{CS} = N \times i \times t$$

$$D_{CS} = 9.000 \times 0{,}06 \times \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{D_{CS} = 360}}$$

2. IOF

Sobre essa operação, houve cobrança de IOF (Imposto sobre Operações Financeiras), com alíquota simples de 3% (0,03) ao ano incidindo sobre o valor Nominal.

Como a taxa do IOF está em anos, devemos transformar a unidade do período de antecipação em ano, uma vez que devem coincidir. 20 dias equivalem a 20/360 do ano.

Logo, o IOF será igual a:

$$IOF = 0{,}03 \times \frac{20}{360} \times 9.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{IOF = 15}}$$

3. taxa final de serviço bancário

Houve ainda a cobrança de uma taxa fixa de serviço bancário de 2% sobre o Valor Nominal. Logo, a taxa bancária será igual a:

$$taxa = 0{,}02 \times 9.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{taxa = 180}}$$

Sendo assim, o Valor Atual final do título será igual a:

$$A = N - D_{CS} - IOF - taxa$$

$$A = 9.000 - 360 - 15 - 180 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A = 8.445}$$

Gabarito: Alternativa **C**

24. **(FGV / Pref. Niterói RJ - 2015) Um título de valor de face de R$ 15.000,00, com vencimento para 90 dias, foi descontado – desconto simples por fora ou desconto comercial – à taxa de desconto de 60% ao ano.**

O valor do desconto, em reais, foi:

a) 1.500
b) 1.750
c) 2.000
d) 2.250
e) 2.500

Comentários:

Observe que a FGV gosta de cobrar bastante aplicações de fórmulas nas diversas modalidades de Descontos. E, perceba também, que constantemente ela fornece a unidade da taxa **diferente** da unidade do tempo de antecipação. Não se esqueça de averiguar as unidades na hora da prova.

O **Desconto Comercial Simples** é calculado pela seguinte equação:

$$D_{CS} = N \times i \times t$$

Onde,

$N = Valor\ Nominal\ ou\ de\ Face = 15.000$

$i = taxa\ de\ desconto = 60\%\ ao\ ano = 5\%\ ao\ mês$

$t = período\ de\ antecipação = 90\ dias = 3\ meses$

Atente-se para a conversão da unidade do tempo de antecipação e da unidade da taxa de desconto para uma mesma unidade, pois **necessariamente** devem coincidir.

Perceba que convertemos as unidades para a unidades "mês".

- Taxa de Desconto

$$i_{mensal} = \frac{i_{anual}}{12}$$

$$i_{mensal} = \frac{60\%}{12} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{i_{mensal} = 5\% = 0,05}}$$

- Tempo de antecipação - Em 1 mês há 30 dias. Logo,

$$t = \frac{90}{30} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{t = 3\ meses}}$$

Substituindo os valores e calculando o Desconto teremos:

$$D_{CS} = N \times i \times t$$

$$D_{CS} = 15.000 \times 0{,}05 \times 3 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{D_{CS} = 2.250}$$

Gabarito: Alternativa **D**

25. (FGV / SMF Cuiabá Adaptada – 2016) Suponha que VF seja o valor futuro, VP o valor presente, i a taxa de juros e n o prazo.

Logo, o valor do desconto racional composto é igual a

a) $\frac{(VP[(1+i)^n-1])}{(1+i)^n}$

b) $\frac{(VF[(1+i)^n])}{(1+i)^n}$

c) $VP - VF$

d) $\frac{(VF[(1+in)]-1)}{(1+in)}$

e) $\frac{(VF[(1+i)^n-1])}{(1+i)^n}$

Comentários:

O desconto racional composto é igual a diferença entre o Valor Nominal VF e o Valor Atual VP, isto é:

$$\boxed{\boldsymbol{D_{RC} = VF - VP} \quad equação\ (I)}$$

Sabemos também que, no Desconto Racional Composto, o Valor Atual VP é calculado pela seguinte equação:

$$\boxed{\boldsymbol{VP = \frac{VF}{(1+i)^n}} \quad equação\ (II)}$$

Vamos substituir o VP da equação (II) na equação (I) e calcular o Desconto.

$$D_{RC} = VF - VP$$

$$D_{RC} = VF - \frac{VF}{(1+i)^n}$$

Manipulando algebricamente teremos:

$$D_{RC} = \frac{(1+i)^n \times VF - VF}{(1+i)^n}$$

Colocando VF em evidência e continuando com os cálculos:

$$D_{RC} = \frac{(1+i)^n \times VF - VF}{(1+i)^n} \rightarrow \boldsymbol{D_{RC} = \frac{VF[(1+i)^n - 1]}{(1+i)^n}}$$

Gabarito: Alternativa **E**

26. (FGV / BANESTES - 2018) Um título é resgatado cinco anos antes do seu vencimento pelas regras do desconto comercial composto. A taxa de desconto utilizada nessa transação é de 10% ao ano.

Se o desconto é de R$ 1.148,00, então o valor resgatado vale:

Dados: $1{,}1^5 = 1{,}61$ e $0{,}9^5 = 0{,}59$

a) R$ 1.816,00
b) R$ 1.800,00
c) R$ 1.744,00
d) R$ 1.708,00
e) R$ 1.652,00

Comentários:

ESTA CAI NA PROVA!

No **Desconto Comercial Composto**, o valor Atual (a ser resgatado) é igual a:

$$A = N \times (1-i)^t$$

Onde,

$A = Valor\ Atual$

$N = Valor\ Nominal$

$i = Taxa\ de\ desconto = 10\%\ ao\ ano = 0{,}1$

$t = tempo\ de\ antecipação = 5\ anos$

Vamos substituir os valores e calcular o Valor Atual em função do Valor Nominal.

$$A = N \times (1 - i)^t$$

$$A = N \times (1 - 0{,}1)^5$$

$$A = N \times 0{,}9^5$$

Observe que o enunciado nos fornece $0{,}9^5 = 0{,}59$.

$$A = N \times 0{,}59 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A = 0,59N \quad equação\ (I)}$$

Um título é resgatado cinco anos antes do seu vencimento pelas regras do desconto comercial composto sendo o Desconto igual a R$ 1.148,00. Ou seja,

$$D_{CC} = N - A$$

$$\boldsymbol{1.148 = N - A \quad equação\ (II)}$$

Na equação (I) calculamos A em função de N. Iremos substituir nesta equação (II) e calcular o valor Nominal.

$$1.148 = N - A$$

$$1.148 = N - 0{,}59N$$

$$1.148 = 0{,}41N$$

$$N = \frac{1.148}{0{,}41} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{N = 2.800}}$$

Por fim, voltamos na equação (II) e calculamos o Valor Atual.

$$1.148 = N - A$$

$$1.148 = 2.800 - A$$

$$A = 2.800 - 1.148 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A = 1.652}$$

Gabarito: Alternativa **E**

27. (FGV / BANESTES - 2018) Uma duplicata tem valor nominal de R$ 4.000,00 e vencerá daqui a dois meses.

Se ela for descontada hoje pelas regras do desconto comercial composto, à taxa de desconto de 10% ao mês, o valor descontado será:

a) R$ 760,00
b) R$ 800,00
c) R$ 2.400,00
d) R$ 3.200,00
e) R$ 3.240,00

Comentários:

Cuidado. Vamos relembrar o conceito de Valor Atual e ver seus sinônimos.

É o valor que o titular do direito **receberá antecipadamente** por ele **depois de efetuar o desconto**. Outras nomenclaturas que, por vezes, aparecem em prova são: **Valor Descontado ou Valor Presente**.

Então, perceba que a questão quer saber qual será o VALOR ATUAL do título.

No Desconto Comercial Composto, o **Valor Atual** (valor descontado) é igual a:

$$A = N \times (1 - i)^t$$

Onde,

$A = Valor\ Atual = ?$

$N = Valor\ Nominal = 4.000$

$i = Taxa\ de\ desconto = 10\%\ ao\ mês = 0{,}1$

$t = tempo\ de\ antecipação = 2\ meses$

Vamos substituir os valores e calcular o Valor Atual.

$$A = N \times (1 - i)^t$$

$$A = 4.000 \times (1 - 0{,}1)^2$$

$$A = 4.000 \times 0{,}9^2$$

$$A = 4.000 \times 0{,}81 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A = 3.240}$$

Gabarito: Alternativa **E**

6. Equivalência de Capitais

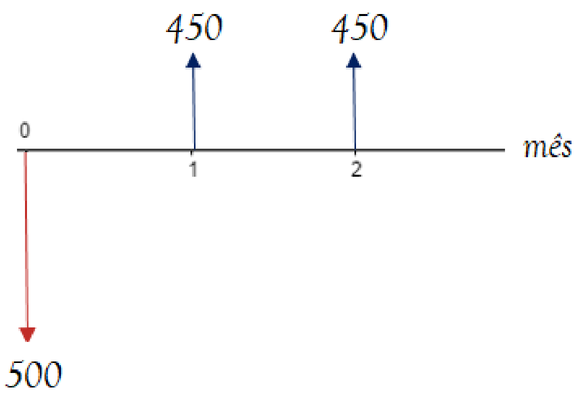
28. (FGV / BANESTES - 2018) Um bem, cujo preço à vista é R$ 500,00, será adquirido por meio de duas prestações mensais consecutivas de R$ 450,00, sendo a primeira delas paga um mês após a compra.

Nessa venda, a taxa mensal de juros compostos aplicada é:

a) 20%
b) 25%
c) 30%
d) 40%
e) 50%

Comentários:

Vamos representar graficamente as 2 opções de pagamentos:



As 2 opções de pagamento são equivalentes. Vamos equivaler os capitais no tempo $t = 2$, pois como vimos na teoria, levar para o futuro (multiplicar) é menos trabalhoso que trazer as parcelas para o presente (dividir).

- No regime de juros compostos, quando deslocamos a parcela para a direita, multiplicamos pelo fator $(1 + i)^t$.

Logo, fazendo a equivalência em $t = 2$ e calculando a taxa teremos:

$$\mathbf{500 \times (1 + \boldsymbol{i})^2 = 450 \times (1 + \boldsymbol{i}) + 450}$$

Nessa altura da questão, você tem 2 opções para continuar a resolução:

- Ou você, de posse das alternativas, chuta valores para i até encontrar a igualdade acima; ou
- Utiliza a incógnita auxiliar e parte para a equação do segundo grau.

Vamos utilizar a experiência de prova para resolver essa continuidade.

"Diga-me, aluno, das alternativas acima, qual você escolheria por primeiro para chutar?"

Tenho (quase) certeza que você respondeu 50%. Se tivesse 10% nas alternativas você responderia 10%, como não tem, creio que sua resposta deve ter sido 50%.

Então, vamos substituir 50% e conferir se há a igualdade:

$$500 \times (1 + i)^2 = 450 \times (1 + i) + 450$$

$$500 \times (1 + 0{,}5)^2 = 450 \times (1 + 0{,}5) + 450$$

$$500 \times 2{,}25 = 450 \times 1{,}5 + 450$$

$$1.125 = 675 + 450$$

$$\mathbf{1.125 = 1.125}$$

Ou seja, houve a igualdade. Logo, constatamos que o gabarito é, de fato, 50%.

"Certo professor, mas eu quero encontrar fazendo pelo segundo jeito. Por equação do segundo grau."

Vamos calcular então pela **incógnita auxiliar**.

$$500 \times (1 + i)^2 = 450 \times (1 + i) + 450$$

Nesse caso, vamos chamar $(1 + i) = y$ e substituir acima e calcular y.

$$500 \times y^2 = 450 \times y + 450$$

Simplificando por 50:

$$10y^2 = 9y + 9$$

$$10y^2 - 9y - 9 = 0$$

Iremos calcular as raízes por Bhaskara:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \times 10 \times (-9)}}{2 \times 10}$$

$$y = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 360}}{20}$$

$$y = \frac{9 \pm \sqrt{441}}{20}$$

$$y = \frac{9 \pm 21}{20} \begin{cases} y = \dfrac{9 + 21}{20} = \dfrac{30}{20} = 1{,}5 \\ \\ y = \dfrac{9 - 21}{20} = \dfrac{-12}{20} = -0{,}6 \end{cases}$$

Nesse caso, não podemos ter taxa negativa. Logo,

$$y = 1{,}5$$

Por fim, substituímos na incógnita que chamamos de auxiliar e calculamos o valor da taxa.

$$(1 + i) = y$$

$$1 + i = 1{,}5$$

$$i = 1{,}5 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i = 0{,}5 \ ou\ 50\%}$$

Gabarito: Alternativa **E**

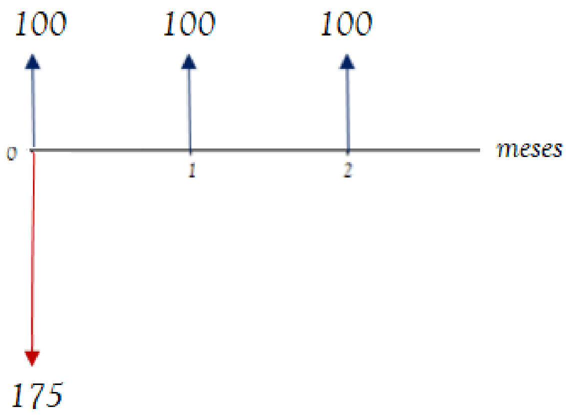
29. (FGV / BANESTES - 2018) Um equipamento eletrodoméstico custa R$ 175,00 à vista, mas pode ser adquirido a prazo por intermédio de três prestações antecipadas mensais iguais e consecutivas de R$ 100,00.

A taxa de juros efetiva composta ao mês cobrada nesse financiamento é de:

a) 100%
b) 80%
c) 75%
d) 72%
e) 36%

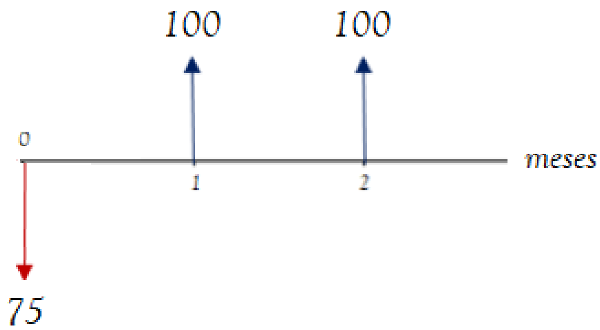
Comentários:

Um equipamento custa R$ 175,00 à vista, mas pode ser pago por 3 prestações mensais antecipadas de R$ 100,00. Vejamos graficamente:



Observe que as parcelas são antecipadas, isto é, pagas no início de cada período. Logo, a primeira parcela é paga na entrada da compra.

Oras, se o preço do produto é R$ 175 à vista e ele paga uma entrada de R$ 100, é porque faltará ao cliente pagar R$ 75. Logo:



As 2 opções de pagamento são equivalentes. Vamos equivaler os capitais no tempo $t = 2$, pois como vimos na teoria, levar para o futuro (multiplicar) é menos trabalhoso que trazer as parcelas para o presente (dividir).

- No **regime de juros compostos**, quando deslocamos a parcela para a direita, multiplicamos pelo fator $(1+i)^t$.

Logo, fazendo a equivalência em $t=2$ e calculando a prestação teremos:

$$75 \times (1+i)^2 = 100 \times (1+i)^1 + 100$$

Mesmo estilo que à questão anterior. Podemos chutar valores ou resolver a equação do segundo grau com o uso da incógnita auxiliar.

Vou deixar para você ir chutando os valores. Você irá constantar que não serão contas complicadas e já adianto que a resposta será seu primeiro chute. Observe as alternativas, caro aluno. Qual você chutaria por primeiro? Com certeza 100% não?

Pois bem, chute e veja se houve a igualdade.

Vamos calcular então pela **incógnita auxiliar**.

$$75 \times (1+i)^2 = 100 \times (1+i)^1 + 100$$

Nesse caso, vamos chamar $(1+i)=y$ e substituir acima e calcular y.

$$75 \times y^2 = 100 \times y + 100$$

Simplificando por 25:

$$3y^2 = 4y + 4$$

$$3y^2 - 4y - 4 = 0$$

Iremos calcular as raízes por Bhaskara:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 3 \times (-4)}}{2 \times 3}$$

$$y = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{6}$$

$$y = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{6}$$

$$y = \frac{4 \pm 8}{6} \begin{cases} y = \dfrac{4+8}{6} = \dfrac{12}{6} = 2 \\ \\ y = \dfrac{4-8}{6} = \dfrac{-4}{6} = -0{,}66 \end{cases}$$

Nesse caso, não podemos ter taxa negativa. Logo,

$$y = 2$$

Por fim, substituímos na incógnita que chamamos de auxiliar e calculamos o valor da taxa.

$$(1 + i) = y$$

$$1 + i = 2$$

$$i = 2 - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i = 1 \ ou \ 100\%}$$

Gabarito: Alternativa **A**

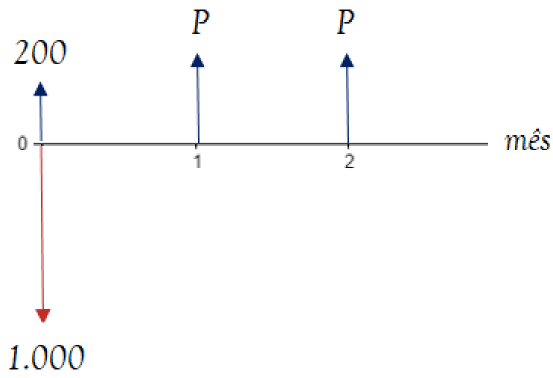
30. (FGV / ALE RO - 2018) Suponha que um consumidor entre em uma loja e verifique que o preço à vista de um ar condicionado é de R$ 1.000,00. No entanto, ele opta pelo financiamento, que exige uma entrada de R$ 200,00 e mais duas parcelas mensais iguais com taxa efetiva mensal de juros de 1%, sob regime composto.

O valor de cada parcela será igual a

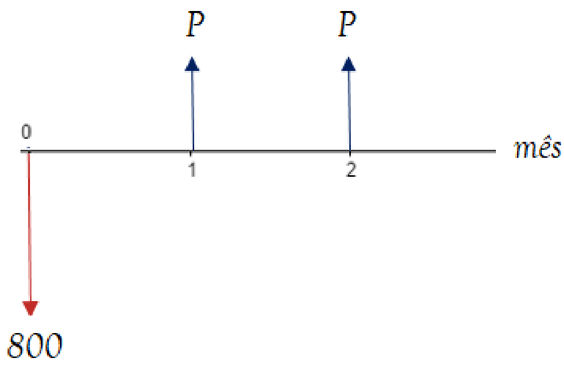
a) R$ 808,00
b) R$ 406,01
c) R$ 404,25
d) R$ 402,50
e) R$ 507,51

Comentários:

Iremos representar graficamente a opção de financiamento:



Oras, se o preço do produto é R$ 1.000,00 à vista e ele paga uma entrada de R$ 200,00, é porque faltará ao cliente pagar R$ 800,00. Logo:



As 2 opções de pagamento são equivalentes. Vamos equivaler os capitais no tempo $t = 2$, pois como vimos na teoria, levar para o futuro (multiplicar) é menos trabalhoso que trazer as parcelas para o presente (dividir).

- No **regime de juros compostos**, quando deslocamos a parcela para a direita, multiplicamos pelo fator $(1 + i)^t$.

Logo, fazendo a equivalência em $t = 2$ e calculando a prestação teremos:

$$800 \times (1 + 0{,}01)^2 = P \times (1 + 0{,}01) + P$$

$$800 \times 1{,}01^2 = P \times 1{,}01 + P$$

$$800 \times 1{,}0201 = 1{,}01P + P$$

$$816{,}08 = 2{,}01P$$

$$P = \frac{816{,}08}{2{,}01} \rightarrow \boldsymbol{P = 406{,}01}$$

Gabarito: Alternativa **B**

31. (FGV / Pref. Salvador - 2017) O cartão de crédito usado por Alberto cobra 10% de juros ao mês, e a fatura vence no dia 5 de cada mês.

A fatura do mês de junho apresentava uma dívida de 1200 reais, mas Alberto nada pagou. Daí por diante, também não fez novas despesas no cartão.

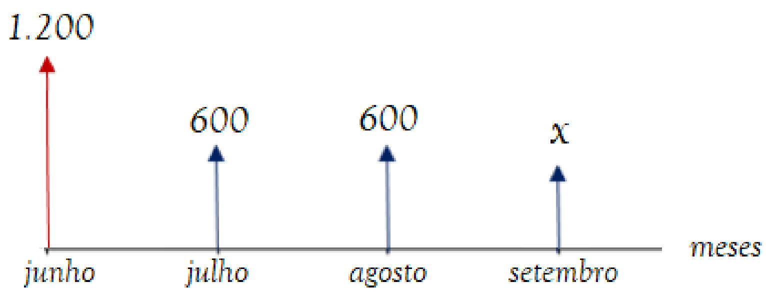
No dia do vencimento da fatura de julho, Alberto pagou 600 reais; no dia do vencimento da fatura de agosto, pagou também 600 reais; e, no dia do vencimento da fatura de setembro, liquidou sua dívida.

O valor pago por Alberto em setembro, em reais e desprezando os centavos, foi de

a) 120
b) 132
c) 158
d) 192
e) 211

Comentários:

Vamos representar graficamente o que nos traz o enunciado.



Alberto deveria pagar 1.200 em Junho. Porém, trocou este único pagamento de 1.200 por 2 mensais sucessivos de 600 e mais um pagamento ao final do terceiro mês no valor de x.

As 2 opções de pagamento são equivalentes. Vamos equivaler os capitais no tempo $t = 3$ (setembro), pois como vimos na teoria, levar para o futuro (multiplicar) é menos trabalhoso que trazer as parcelas para o presente (dividir).

- No **regime de juros compostos**, quando deslocamos a parcela para a direita, multiplicamos pelo fator $(1 + i)^t$.

Logo, fazendo a equivalência em $t = 3$ e calculando a prestação teremos:

$$1.200 \times (1 + 0{,}1)^3 = 600 \times (1 + 0{,}1)^2 + 600 \times (1 + 0{,}1)^1 + x$$

$$1.200 \times 1,331 = 600 \times 1,21 + 600 \times 1,1 + x$$

$$1.597,20 = 726 + 660 + x$$

$$x = 1.597,20 - 726 - 660 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 211,20}$$

E assim, o resultado é a Alternativa **E**.

Poderíamos resolver também passo a passo.

A fatura do mês de Junho apresentava uma dívida de 1200 reais e Alberto nada pagou até Julho. Ou seja, esta dívida capitalizou pelo período de 1 mês.

$$1.200 \times 1,1 = 1.320$$

Em Julho, ele pagou 600 reais. Logo, a dívida restante será:

$$1.320 - 600 = 720$$

Esta dívida restante em Julho (720) capitalizou por mais 1 mês (até agosto).

$$720 \times 1,1 = 792$$

Em Agosto, Alberto pagou mais 600.

$$792 - 600 = 192$$

Então, a dívida restante em Agosto era de 192 reais que capitalizou por mais um mês e foi totalmente quitada em Setembro.

$$192 \times 1,1 = \mathbf{211,2}$$

Ou seja, o pagamento em Setembro foi igual a R$ 211,20.

Gabarito: Alternativa **E**

32. (FGV / ISS Cuiabá - 2016) Suponha que João tenha obtido um financiamento de R$ 100,00 à taxa efetiva de 50% ao ano, no regime de juros compostos. Por sua vez, Maria obteve um financiamento de R$ 1.000,00 sob as mesmas condições de João. Em ambos os casos, o prazo de operação é de dois anos.

As prestações anuais para João e Maria são, respectivamente, iguais a

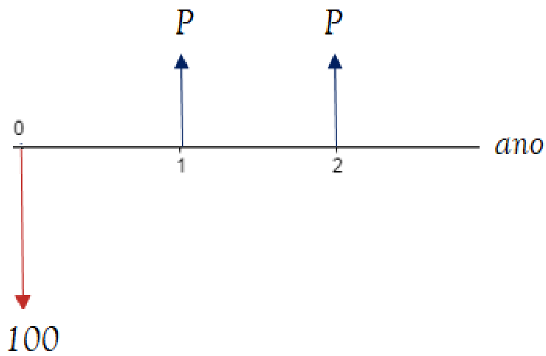
a) R$ 100,00 e R$ 1.000,00.
b) R$ 95,00 e R$ 1.200,00.

c) R$ 90,00 e R$ 900,00.
d) R$ 85,00 e R$ 1.000,00.
e) R$ 80,00 e R$ 800,00.

Comentários:

Vamos calcular separadamente a parcela de João e de Maria.

- João oteve um financiamento de R$ 100,00 à taxa efetiva de 50% ao ano, no regime de juros compostos e pagou em 2 prestações anuais. Graficamente teremos:



Iremos fazer a equivalência de capitais no tempo $t = 2$, pois como vimos na teoria, levar para o futuro (multiplicar) é menos trabalhoso que trazer as parcelas para o presente (dividir).

- No **regime de juros compostos**, quando deslocamos a parcela para a direita, multiplicamos pelo fator $(1 + i)^t$.

Logo, fazendo a equivalência em $t = 2$ e calculando a prestação teremos:

$$100 \times (1 + 0{,}5)^2 = P \times (1 + 0{,}5) + P$$

$$100 \times 1{,}5^2 = P \times 1{,}5 + P$$

$$100 \times 2{,}25 = 1{,}5P + P$$

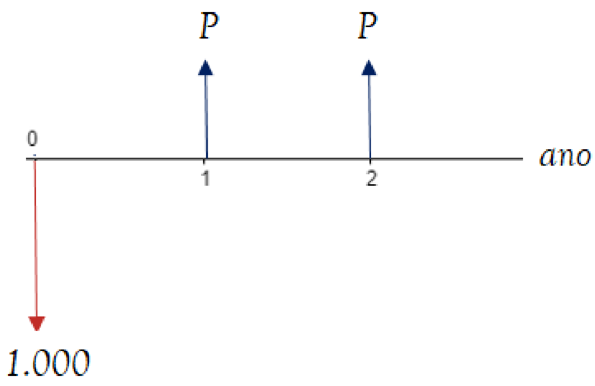
$$225 = 2{,}5P$$

$$P = \frac{225}{2{,}5} \rightarrow \boldsymbol{P = 90}$$

Observe que, na hora da prova, poderíamos marcar a Alternativa C e partir para a próxima questão.

Vamos, agora, calcular a prestação de Maria.

- Maria obteve um financiamento de R$ 1.000,00 sob as mesmas condições de João



Equivalendo os Capitais na data $t = 2$:

$$1.000 \times (1 + 0{,}5)^2 = P \times (1 + 0{,}5) + P$$

$$1.000 \times 1{,}5^2 = P \times 1{,}5 + P$$

$$1.000 \times 2{,}25 = 1{,}5P + P$$

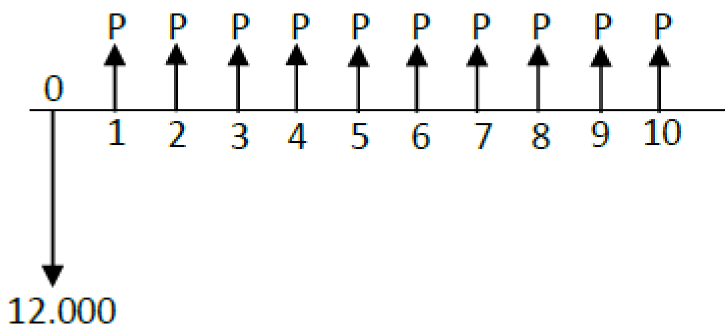
$$2.250 = 2{,}5P$$

$$P = \frac{2.250}{2{,}5} \rightarrow \boldsymbol{P = 900}$$

Gabarito: Alternativa **C**

7. RENDAS CERTAS (RENDAS UNIFORMES)

33. (FGV /BANESTES - 2018) O diagrama a seguir apresenta as projeções dos fluxos de caixa líquidos de um projeto, em reais, durante dez meses.



Se a Taxa Interna de Retorno (TIR) é 4% a.m., então o valor de P é:

Dados: $1{,}04^9 = 1{,}42$; $1{,}04^{10} = 1{,}48$; $1{,}04^{11} = 1{,}54$

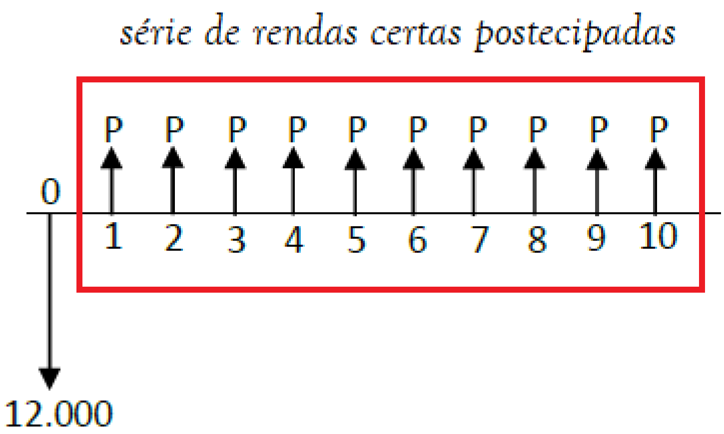
a) R$ 1.370,00
b) R$ 1.427,00
c) R$ 1.480,00
d) R$ 1.565,00
e) R$ 1.623,00

Comentários:

Na próxima aula veremos que a TIR é a taxa de desconto que, quando aplicada sobre o fluxo de caixa futuro trazido a valor presente, iguala-o ao investimento inicial.

Ou seja, o Valor Presente desse fluxo de caixa a uma taxa de 4% a.m. será igual ao valor do Investimento Inicial, isto é, igual a R$ 12.000,00.

Observe que o fluxo de caixa se trata de uma **série de rendas certas postecipadas**. Vejamos graficamente:



O VA dessa série de rendas é igual a R$ 12.000.

$$VA = P \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i \times (1+i)^n}\right]$$

Iremos substituir os valores e calcular P.

$$12.000 = P \times \left[\frac{(1+0{,}04)^{10} - 1}{0{,}04 \times (1+0{,}04)^{10}}\right]$$

$$12.000 = P \times \left[\frac{1{,}04^{10} - 1}{0{,}04 \times 1{,}04^{10}}\right]$$

O enunciado nos fornece o valor da potência: $1{,}04^{10} = 1{,}48$

$$12.000 = P \times \left[\frac{1{,}48 - 1}{0{,}04 \times 1{,}48}\right]$$

$$12.000 = P \times \left[\frac{0{,}48}{0{,}04 \times 1{,}48}\right]$$

$$P = \frac{12.000 \times 0{,}04 \times 1{,}48}{0{,}48} \rightarrow \boldsymbol{P = 1.480}$$

Gabarito: Alternativa **C**

34. (FGV / BANESTES - 2018) Um empréstimo deverá ser quitado em 6 prestações mensais iguais de R$ 670,00, segundo o Sistema de Amortização Francês (Tabela Price.), com a primeira prestação vencendo um mês após a contratação. A taxa de juros nominal é de 60% ao ano, com capitalização mensal.

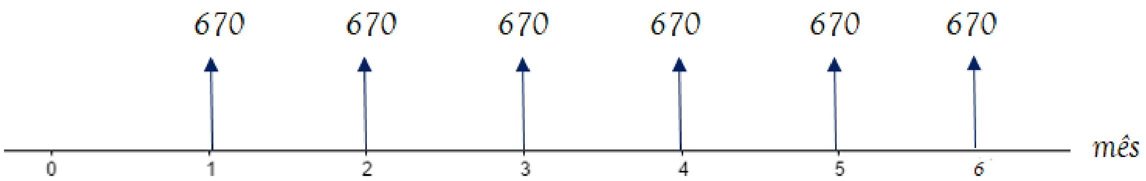
O saldo devedor imediatamente após o pagamento da 1ª prestação será:

Dado: $1{,}05^6 = 1{,}34$

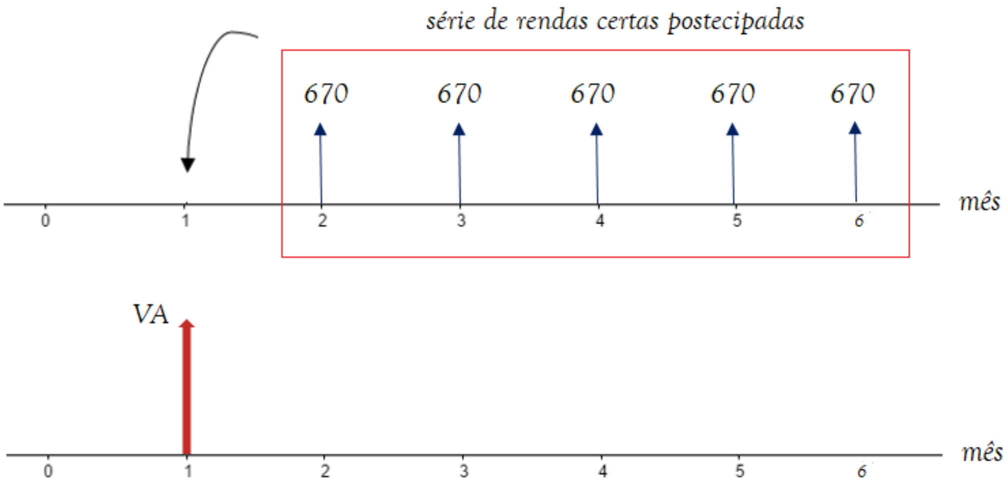
a) R$ 2.900,00
b) R$ 2.830,00
c) R$ 2.800,00
d) R$ 2.730,00
e) R$ 2.700,00

Comentários:

Um empréstimo deverá ser quitado em 6 prestações mensais iguais de R$ 670,00, com a primeira prestação vencendo um mês após a contratação.



O enunciado nos questiona qual o saldo devedor depois do primeiro pagamento. Observe o esquema abaixo:



Perceba que o Saldo Devedor será igual ao Valor Atual da 5 rendas certas postecipadas que ainda faltam pagar.

Lembrando que **Valor Atual (VA)** de uma série de rendas certas **Postecipadas** é **a soma** de todas as **n** rendas certas **P** descontadas pela mesma taxa de juros **i**. O VA é calculado pela seguinte fórmula:

$$VA = P \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i \times (1+i)^n}\right]$$

Antes de substituirmos os valores na fórmula, devemos calcular a taxa efetiva da operação uma vez que a banca nos fornece a taxa nominal (estudamos exaustivamente essa conversão na aula de "juros compostos").

$$i_{ef} = \frac{60\%}{12} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{i_{ef} = 5\%\ ao\ mês}}$$

Iremos substituir os valores e calcular o Saldo Devedor:

$$VA = P \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i \times (1+i)^n}\right]$$

$$VA = 670 \times \left[\frac{(1+0{,}05)^5 - 1}{0{,}05 \times (1+0{,}05)^5}\right]$$

$$VA = 670 \times \left[\frac{1{,}05^5 - 1}{0{,}05 \times 1{,}05^5}\right]$$

A FGV gosta de complicar, caro aluno. Observe que ela nos fornece o valor da potência $1{,}05^6$.

Vamos então <u>manipular algebricamente</u> esta potência para achar $1{,}05^5$.

$$1{,}05^5 = \frac{1{,}05^6}{1{,}05}$$

$$1{,}05^5 = \frac{1{,}34}{1{,}05} \quad \rightarrow \quad 1{,}05^5 \cong 1{,}276$$

Substituindo e calculando VA:

$$VA = 670 \times \left[\frac{1{,}276 - 1}{0{,}05 \times 1{,}276}\right] \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{VA \cong 2.900}$$

Gabarito: Alternativa **A**

35. (FGV / BANESTES - 2018) Antônia faz um empréstimo bancário de R$ 10.000,00, que será quitado em 5 prestações mensais antecipadas de R$ 1.400,00 cada uma e um pagamento final junto com a última prestação. O banco cobra juros efetivos de 7% a.m. sob regime de capitalização composta e estipula um período de carência de dois meses.

O valor do pagamento final é:

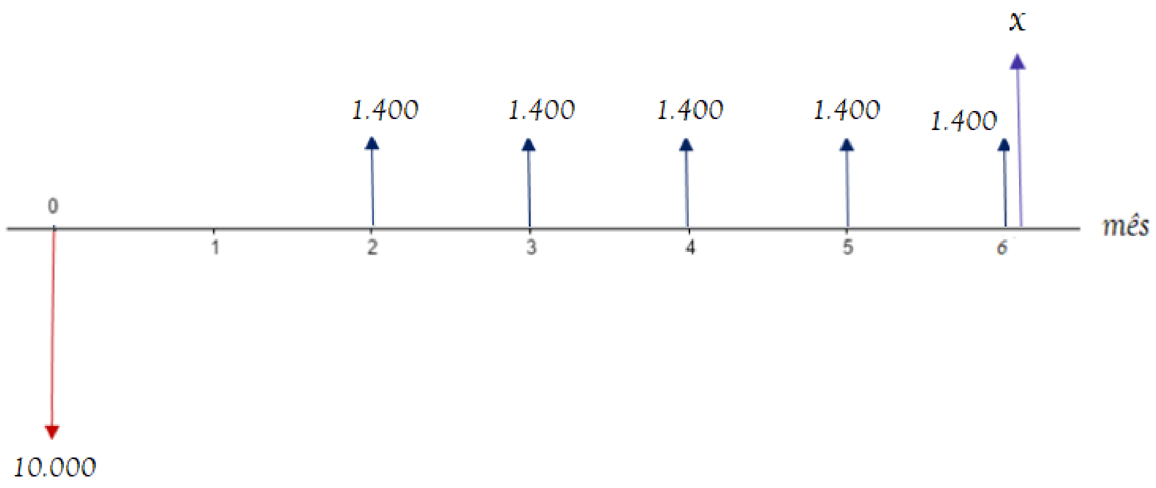
Dado: 1,07 5 = 1,40

a) R$ 69,80
b) R$ 72,20
c) R$ 722,00
d) R$ 6.980,00
e) R$ 7.220,00

Comentários:

Vamos representar graficamente o que nos traz o enunciado.

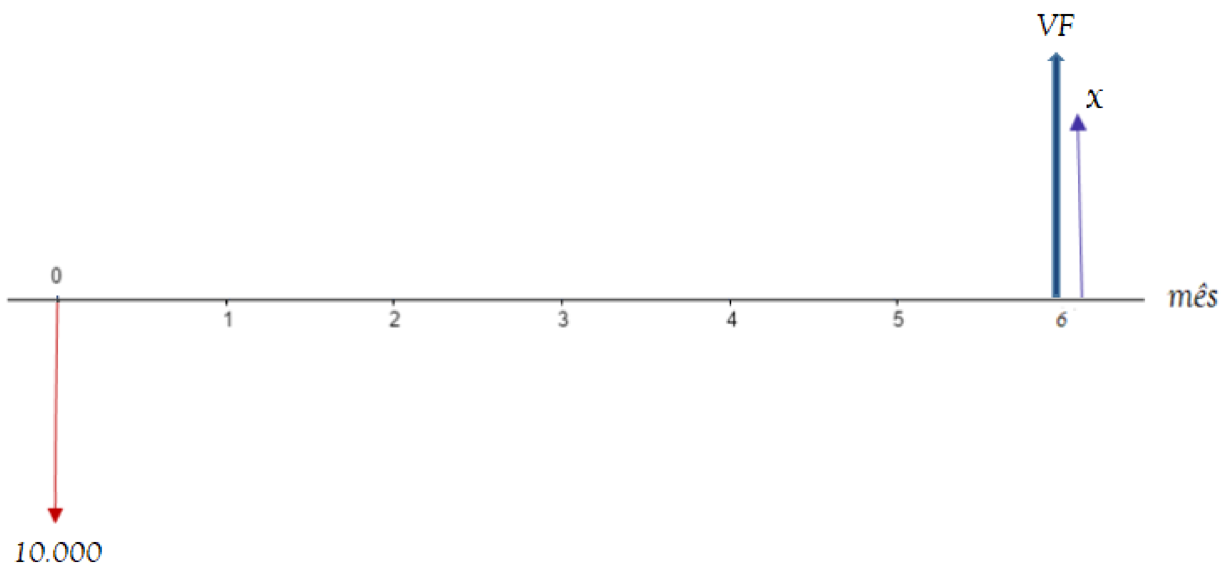
Antônia faz um empréstimo bancário de R$ 10.000,00, que será quitado em 5 prestações mensais antecipadas de R$ 1.400,00 cada uma e um pagamento final junto com a última prestação. O banca estipula um período de carência de 2 meses.



Então, perceba que há o Empréstimo na data $t = 0$ de R$ 10.000 seguido de 5 pagamentos de R$ 1.400 começando no início do segundo período (uma vez que os pagamentos são antecipados) e um pagamento final junto com a última prestação no valor de x.

Para equivaler estes capitais, vamos levar todo o fluxo de caixa para a data final $t = 6$.

Observe que, no tempo $t = 6$, já temos o pagamento final de x e teremos também o Valor Futuro (VF) da série de 5 rendas certas no valor de R$ 1.400.



Então, nossa **equivalência de Capitais no tempo $t = 6$** será:

$$10.000 \times (1 + i)^6 = VF + x \quad equação\ (I)$$

Vamos calcular separadamente o VF da série de 5 rendas certas de R$ 1.400 a uma taxa de 7% ao mês.

Lembrando que o **Valor Futuro (VF)** de uma série de rendas certas é o valor no momento “n” que equivale a **soma de todas** as **n** rendas certas **P** capitalizadas pela mesma taxa de juros **i**.

$$VF = P \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$VF = 1.400 \times \left[\frac{(1+0{,}07)^5 - 1}{0{,}07}\right]$$

$$VF = 1.400 \times \left[\frac{1{,}07^5 - 1}{0{,}07}\right]$$

Observe que o enunciado nos fornece $1{,}07^5 = 1{,}4$.

$$VF = 1.400 \times \left[\frac{1{,}4 - 1}{0{,}07}\right]$$

$$VF = 1.400 \times \left[\frac{0{,}4}{0{,}07}\right] \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{VF = 8.000}}$$

Iremos voltar na equação (I) e calcular o valor de x.

$$10.000 \times (1+i)^6 = VF + x$$

$$10.000 \times (1+0{,}07)^6 = 8.000 + x$$

$$10.000 \times 1{,}07^6 = 8.000 + x$$

Perceba que o enunciado nos fornece o valor da potência elevada a 5. Então, vamos "desmembrar" o fator para aparecer $1{,}07^5$ e calcular, por fim, o valor do pagamento final x.

$$10.000 \times 1{,}07^6 = 8.000 + x$$

$$10.000 \times 1{,}07^5 \times 1{,}07 = 8.000 + x$$

$$10.000 \times 1{,}4 \times 1{,}07 = 8.000 + x$$

$$14.980 = 8.000 + x$$

$$x = 14.980 - 8.000 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 6.980}$$

Gabarito: Alternativa **D**

36. (FGV / ALERO - 2018) Um imóvel custa, à vista, R$ 262.000,00, mas pode ser financiado em 30 meses, de acordo com o seguinte fluxo de pagamentos:

Entrada	pagamento único, feito no ato da aquisição do imóvel, no valor de R$ 80.000,00;
25 prestações	mensais, iguais, no valor de R$ 1.800,00, sendo a primeira delas paga 6 meses após a aquisição do imóvel;
Final	pagamento único feito no encerramento do financiamento, juntamente com a última prestação

Dados: $1{,}02^{12} = 1{,}26$

$1{,}02^{25} = 1{,}64$

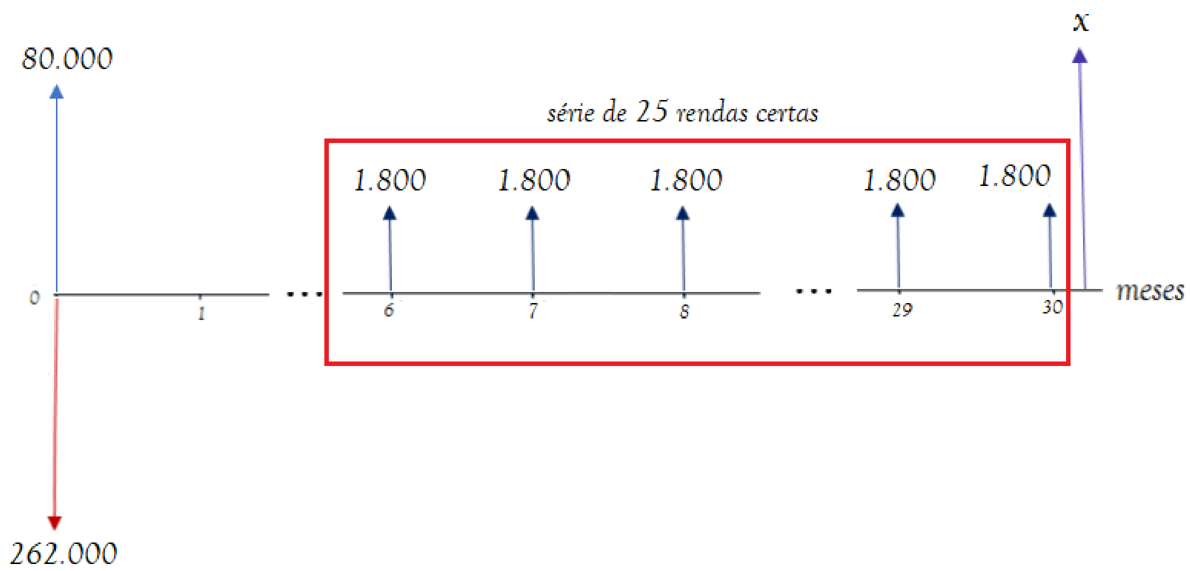
$1{,}02^{30} = 1{,}80$

Se a taxa composta de juros utilizada durante todo o fluxo é de 2% a.m., então o valor do pagamento Final é

a) R$ 270.000
b) R$ 260.000
c) R$ 200.000
d) R$ 170.000
e) R$ 160.000

Comentários:

Vamos representar graficamente as 2 opções de compra para melhor visualização do problema.

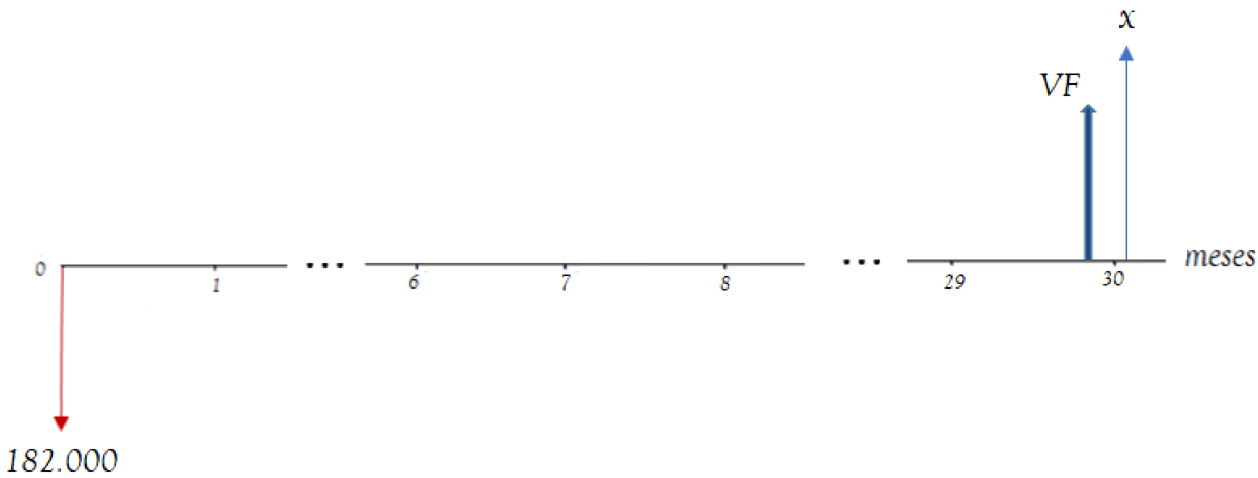


Acho que graficamente ficou melhor de entender, certo?

O pagamento em vermelho refere-se à opção à vista, equanto o pagamento em azul refere-se à opção "parcelada".

Vamos ter que equivaler os capitais. As 2 opções de pagamento são equivalentes. Vamos equivaler os capitais no tempo $t = 30$, pois como vimos na teoria, levar para o futuro (multiplicar) é menos trabalhoso que trazer as parcelas para o presente (dividir).

Mas antes de proceder com as contas, vamos "ajeitar" nosso gráfico.



Perceba que no tempo $t = 0$, "compensamos" os dois capitais que nele estavam e transformamos a série de 25 rendas certas em um Valor Futuro que corresponde a **soma de todas** as **n** rendas certas **P** capitalizadas pela mesma taxa de juros **i**.

Nossa equivalência de capitais no tempo $t = 30$ será:

$$182.000 \times (1+i)^{30} = VF + x \qquad equação\ (I)$$

Vamos calcular separadamente o VF da série de 25 rendas certas de R$ 1.800 a uma taxa de 2% ao mês.

$$VF = P \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$VF = 1.800 \times \left[\frac{(1+0{,}02)^{25} - 1}{0{,}02}\right]$$

$$VF = 1.800 \times \left[\frac{(1{,}02)^{25} - 1}{0{,}02}\right]$$

O enunciado nos informa que $(1{,}02)^{25} = 1{,}64$.

$$VF = 1.800 \times \left[\frac{1{,}64 - 1}{0{,}02}\right]$$

$$VF = 1.800 \times \left[\frac{0{,}64}{0{,}02}\right]$$

$$VF = 1.800 \times 32 \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{VF = 57.600}}$$

Iremos voltar na equação (I) e calcular o valor do pagamento final x.

$$182.000 \times (1 + i)^{30} = VF + x$$

$$182.000 \times (1 + 0{,}02)^{30} = 57.600 + x$$

$$182.000 \times (1{,}02)^{30} = 57.600 + x$$

De acordo com o enunciado, $(1{,}02)^{30} = 1{,}8$.

$$182.000 \times 1{,}8 = 57.600 + x$$

$$327.600 = 57.600 + x$$

$$x = 327.600 - 57.600 \quad \rightarrow \boldsymbol{x = 270.000}$$

Gabarito: Alternativa **A**

8. RENDAS PERPÉTUAS

37. (FGV / Pref. Niterói - 2015) Uma instituição financeira oferece resgate do valor equivalente às reservas de um plano de benefícios perpétuos em uma única vez. O acordo dará quitação geral e definitiva dos benefícios, com a consequente extinção dos contratos.

Para um cliente que recebe R$ 3.000,00 mensais, foi oferecido o valor do pagamento de R$ 60.000,00. Desconsidere impostos e taxas.

A taxa mensal de juros compostos praticada pela instituição nesse tipo de operação foi:

a) 5,0%
b) 5,5%
c) 7,1%
d) 8,0%
e) 10,2%

Comentários:

ESTA CAI NA PROVA!

A FGV adora cobrar o tema "Rendas Perpétuas" em sua prova. Acredito que 1 questão da prova versará sobre este assunto.

O termo **perpetuidade** sugere fluxos de duração infinita (sem limite) ou, mais precisamente, **números de prestações que não podem ser determinadas exatamente.**

Perceba que a banca não nos informa o período das parcelas. Nesse caso, por convenção, adotaremos parcelas postecipadas.

O **Valor Atual** de uma série de Rendas Perpétuas Postecipadas é igual a:

$$VA = \frac{P}{i}$$

Onde,

$VA = Valor\ Atual\ ou\ Presente = 60.000$

$P = Prestação\ Perpétua = 3.000$

$i = Taxa\ de\ Juros = ?$

Vamos substituir os valores e calcular a taxa de juros:

$$VA = \frac{P}{i}$$

$$60.000 = \frac{3.000}{i}$$

$$i = \frac{3.\cancel{000}}{60.\cancel{000}} \rightarrow \boldsymbol{i = 0,05\ ou\ 5\%}$$

Gabarito: Alternativa **A**

38. (FGV / ISS Niterói - 2015) Para usufruir perpetuamente R$ 2.000,00 por mês, reajustados mensalmente a uma taxa de 6%, o valor da renda um mês antes do primeiro pagamento, supondo taxa de juros de 10% ao mês, é, em reais:

a) 12.500
b) 20.000
c) 22.000
d) 50.000
e) 55.000

Comentários:

Observe que essa questão nos traz uma **taxa de crescimento** da parcela perpétua.

Vamos, então, aplicar a fórmula de Valor Atual de uma **série de rendas perpétuas postecipadas com crescimento.**

$$VA = \frac{P}{i - g}$$

Onde,

$VA = Valor\ Atual\ ou\ Valor\ Presente = ?$

$P = Prestação\ Perpétua = 2.000$

$i = taxa\ de\ juros = 10\%\ ao\ mês = 0{,}1$

$g = Taxa\ de\ Crescimento = 6\%\ ao\ mês = 0{,}06$

Substituindo os valores teremos:

$$VA = \frac{P}{i - g}$$

$$VA = \frac{2.000}{0{,}1 - 0{,}06}$$

$$VA = \frac{2.000}{0{,}04} \rightarrow \boldsymbol{VA = 50.000}$$

Gabarito: Alternativa **D**

9. VPL E TIR

39. (FGV / BANESTES - 2018) Um dos métodos para se analisar a viabilidade de um projeto de investimento é o do VPL (Valor Presente Líquido). Para utilizá-lo, estimam-se os fluxos de caixa líquidos gerados pelo projeto e, com o auxílio da taxa de custo do capital, calcula-se o valor

presente desses fluxos. Um resultado positivo indica que o projeto é economicamente viável caso a estimativa de fluxos de caixa esteja correta e se o projeto completar seu prazo.

A seguir estão as projeções dos fluxos de caixa líquidos de um projeto.

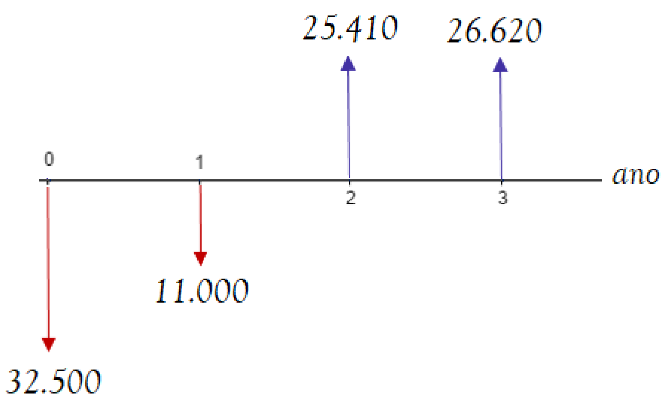
Ano	0	1	2	3
Fluxo em reais	(32.500)	(11.000)	25.410	26.620

Se essas projeções são válidas e se o custo do capital ao ano é de 10%, conclui-se que o projeto é economicamente:

a) inviável, porque o VPL é igual a -15.000 reais;
b) inviável, porque o VPL é igual a -1.500 reais;
c) viável, porque o VPL é igual a 1.500 reais;
d) viável, porque o VPL é igual a 5.000 reais;
e) viável, porque o VPL é igual a 15.000 reais.

Comentários:

Iremos, primeiramente, desenhar o fluxo de caixa desse projeto.



A fórmula do VPL será igual a:

$$VPL = -32.500 - \frac{11.000}{(1+i)^1} + \frac{25.410}{(1+i)^2} + \frac{26.620}{(1+i)^3}$$

Vamos calcular o VPL para uma taxa de desconto de 10% ao ano, conforme pedido pelo enunciado, para saber se o investimento será viável ou não.

$$VPL = -32.500 - \frac{11.000}{(1+0{,}1)^1} + \frac{25.410}{(1+0{,}1)^2} + \frac{26.620}{(1+0{,}1)^3}$$

$$VPL = -32.500 - \frac{11.000}{1{,}1^1} + \frac{25.410}{1{,}1^2} + \frac{26.620}{1{,}1^3}$$

$$VPL = -32.500 - \frac{11.000}{1{,}1} + \frac{25.410}{1{,}21} + \frac{26.620}{1{,}331}$$

$$VPL = -32.500 - 10.000 + 21.000 + 20.000 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{VPL = -1.500}$$

Ou seja, o investimento será **INVIÁVEL**, uma vez que o VPL é **negativo** no valor de -1.500.

Gabarito: Alternativa **B**

40. (FGV / ALERO - 2018) A análise de viabilidade se realiza em diversos campos e deve considerar vários cenários. A informação utilizada na análise de viabilidade financeira, que leva em consideração o valor do dinheiro no tempo e ainda o volume de investimento em valores absolutos, é denominada

a) Fluxo de Caixa.
b) Custo de Oportunidade.
c) Inflação.
d) Valor Presente Líquido.
e) Risco.

Comentários:

Estudamos que o **Valor Presente Líquido (VPL)**, como o próprio nome sugere, é o Valor do fluxo de caixa no momento $t = 0$, isto é, no **tempo inicial** do investimento.

Para o cálculo do VPL iremos transportar todas as **ENTRADAS** e **SAÍDAS** de Capital (em valores absolutos) para a data focal $t = 0$ e verificar o valor resultante (em valor Presente). No cálculo do VPL, todas as parcelas são submetidas a mesma taxa de juros, denominada **TAXA MÍNIMA DE ATRATIVIDADE $(\boldsymbol{i_a})$.**

Perceba então, que o VPL leva em consideração o valor do dinheiro no tempo quando traz as parcelas a Valor Presente.

As demais alternativas **não guardam pertinência** com a questão. Vejamos:

- Fluxo de Caixa: Na matemática financeira, o **Diagrama do Fluxo de Caixa** é a **representação gráfica** das operações de Capital (entradas e saídas) em uma reta horizontal crescente estabelecida como o tempo.

- Custo de Oportunidade: O que se está deixando de ganhar para investir nesse projeto? Também é um dos fatores a ser levado em consideração. Custo de Oportunidade não é necessariamente uma taxa. Na economia é tratada em termos resumidos como o custo da opção que foi deixada de lado.

- Inflação: Aumento generalizado de preços.

Gabarito: Alternativa **D**

41. (FGV / ALERO - 2018) Existem diversos critérios para avaliar se uma alternativa de investimento é economicamente viável ou não. Um desses critérios é o método do VPL (Valor Presente Líquido). Nesse método, calcula-se o valor presente dos fluxos de caixa líquidos estimados para esse projeto. Se o projeto completar seu prazo e as projeções dos fluxos de caixa estiverem corretas, o projeto será considerado economicamente viável se o VPL for positivo.

O quadro a seguir apresenta as projeções para os fluxos de caixa líquidos de um projeto de investimento.

Ano	0	1	2
Fluxo em reais	(27.000)	7.200	31.680

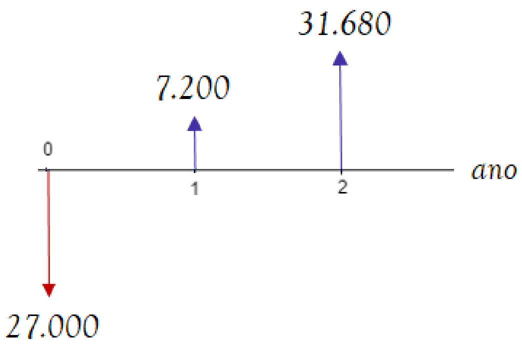
Considere que essas projeções são válidas e que o custo do capital ao ano é de 20%.

Nessas condições, o projeto é economicamente

a) inviável porque o VPL é igual a - 2.000 reais.
b) inviável porque o VPL é igual a - 1.000 reais.
c) inviável porque o VPL é igual a - 500 reais.
d) viável porque o VPL é igual a 500 reais.
e) viável porque o VPL é igual a 1.000 reais.

Comentários:

Vamos, primeiramente, representar o fluxo de caixa desse projeto.



O VPL será igual a seguinte equação:

$$VPL = -27.000 + \frac{7.200}{(1+i)^1} + \frac{31.680}{(1+i)^2}$$

Iremos, então, calcular o VPL para uma taxa de atratividade de 20% conforme questionado pelo enunciado.

$$VPL = -27.000 + \frac{7.200}{(1+0{,}2)^1} + \frac{31.680}{(1+0{,}2)^2}$$

$$VPL = -27.000 + \frac{7.200}{1{,}2^1} + \frac{31.680}{1{,}2^2}$$

$$VPL = -27.000 + \frac{7.200}{1{,}2} + \frac{31.680}{1{,}44}$$

$$VPL = -27.000 + 6.000 + 22.000 \quad \rightarrow \boldsymbol{VPL = +1.000}$$

Ou seja, o investimento será **VIÁVEL**, uma vez que o VPL é **positivo** no valor de 1.000.

Gabarito: Alternativa **E**

42. (FGV / BANESTES - 2018) Considere um projeto de investimento que apresenta um fluxo de caixa de investimento no instante zero e demais fluxos de caixa, futuros, positivos. Considere também um gráfico cartesiano em que o eixo das abscissas (X) represente todos as possíveis taxas de desconto a serem utilizadas para o cálculo do Valor Presente Líquido – VPL desse projeto e que o eixo das ordenadas (Y) represente os próprios VPL calculados para cada taxa. Alguns pontos (x; y) foram observados nesse gráfico: (0%; R$ 500.000), (10%; R$ 100.000), (20%; - R$ 190.000).

Sendo assim, baseando-se no critério de VPL para aprovação de projetos e dentro do campo de análise das taxas positivas, é correto afirmar que uma taxa de desconto:

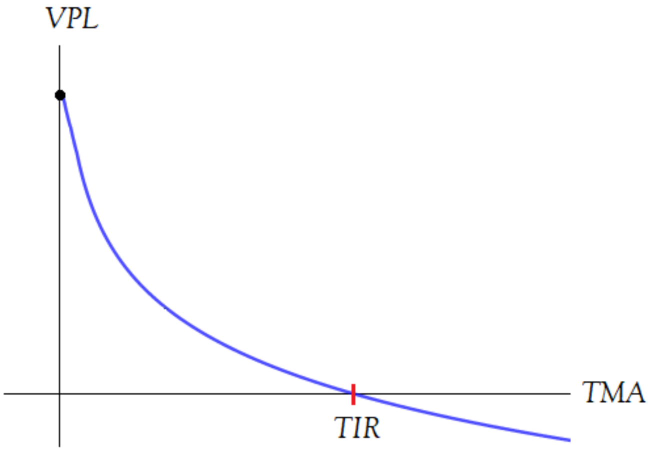
a) maior que 10% pode gerar um VPL positivo ou negativo;
b) maior que 20% pode gerar um VPL positivo;
c) igual a 0% equivale à Taxa Interna de Retorno;
d) menor que 20% gera um VPL negativo;
e) menor que 10% destrói valor.

Comentários:

O enunciado aborda o gráfico da relação entre a Taxa de Desconto e o VPL. Vejamos uma breve revisão antes de responder a questão.

Estudamos que, quanto **MAIOR a Taxa de desconto** utilizada, **MENOR será o valor do VPL**.

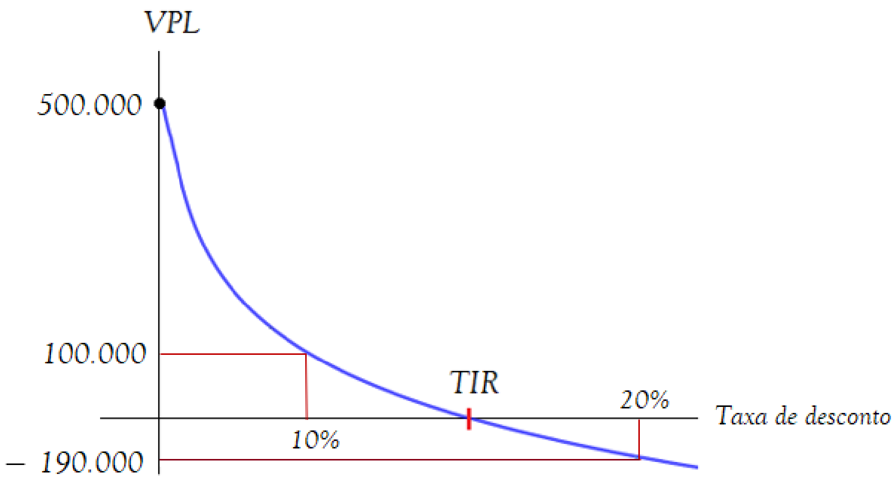
Vamos representar graficamente essa relação.



Perceba que o valor do VPL diminui quando “andamos” para a direita no gráfico, isto é, quanto maior for a TMA menor será o VPL (conforme demonstramos acima em números).

Vemos então, que a taxa mínima de atratividade utilizada e o VPL comportam-se de maneira **inversamente proporcional**: quanto **maior a taxa de desconto**, maior será o valor descontado e consequentemente, **menor será o VPL**.

Iremos, agora, traçar o gráfico com os pontos fornecidos no enunciado.



De posse do gráfico com todos os pontos assinalados, podemos analisar item a item.

a) maior que 10% pode gerar um VPL positivo ou negativo;

CORRETO. Observe que, no intervalo de 10% até o valor da TIR, o VPL será positivo. E para valores maiores que a TIR, o VPL será negativo.

Perceba então que, para valores maiores que 10% o VPL pode ser tanto positivo (até a TIR) quanto negativo (maior que a TIR).

b) maior que 20% pode gerar um VPL positivo;

INCORRETO. Veja que, para taxas maiores que 20%, **NECESSARIAMENTE**, o VPL já será negativo. Qualquer região maior que 20% do eixo x que você pegar, o resultado será um VPL negativo.

c) igual a 0% equivale à Taxa Interna de Retorno;

INCORRETO. Observe pelo gráfico que a TIR é um valor entre 10% e 20%. Ou seja, jamais poderia ser 0%.

d) menor que 20% gera um VPL negativo;

INCORRETO. Não necessariamente. Veja que 10% é menor que 20% e gerou um VPL positivo.

Temos duas opções que seriam corretas.

"menor que 20% e maior que a TIR gera um VPL negativo." ou "maior que 20% gera um VPL negativo".

e) menor que 10% destrói valor.

INCORRETO. Observe que para taxas menores que 10% o VPL será positivo. Sendo assim, o projeto será viável economicamente e "construirá" valor.

Gabarito: Alternativa **A**

43. (FGV / CODEMIG - 2015) Para se encontrar o Valor Presente Líquido – VPL de um projeto de investimento, algumas suposições são feitas pelo analista. Uma delas é supor o que será feito com os fluxos de caixa líquidos positivos projetados e que deverão ocorrer ao longo da vida útil do projeto. Nessa técnica, considera-se que tais fluxos de caixa serão reinvestidos a uma taxa igual à taxa:

a) da caderneta de poupança atualizada;
b) da carteira de mercado encontrada;
c) de desconto utilizada;
d) interna de retorno calculada;

e) livre de risco do país disponibilizada.

Comentários:

Ótima questão para relembrar este "pequeno" tópico da teoria, onde estudamos que:

FIQUE ATENTO!

O VPL pressupõe que os valores são reinvestidos com base na **própria TMA**, isto é, na taxa de desconto utilizada.

Quando um investidor admite uma TMA para seu projeto, isso quer dizer que, no mercado de capitais, ele conseguiria algum investimento que rendesse esse mesmo percentual (ou aproximadamente) da TMA.

Então, se eu defino uma TMA de 12% para meu projeto em elaboração, isso quer dizer que eu tenho alguma solução alternativa "por fora" que me garanta esse retorno de 12%. Isto é, o método do VPL pressupõe que os valores são reinvestidos com base na própria TMA.

Gabarito: Alternativa **C**

44. (FGV / CGE MA – 2014) O projeto J pode ser representado pelo fluxo de caixa a seguir (em Reais) e possui Taxa Mínima de Atratividade de 10% ao ano.

Ano	Fluxo de Caixa
0	$-R\$\ 800.000$
1	$R\$\ 300.000$
2	$R\$\ 350.000$
3	$R\$\ 400.000$

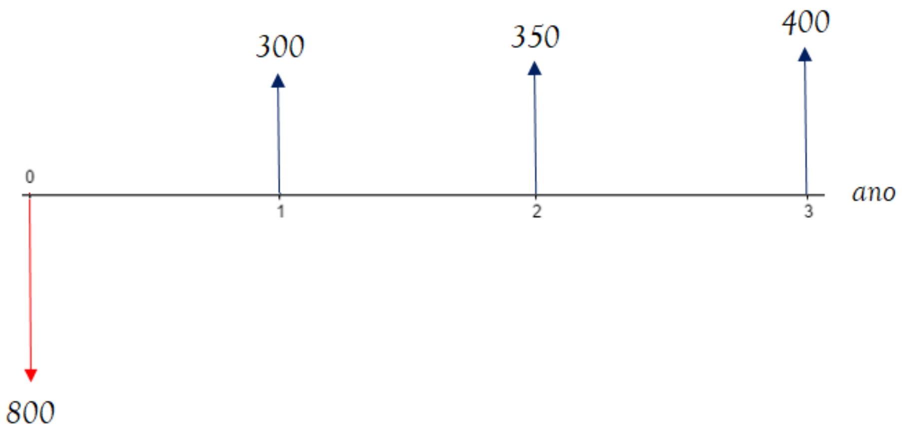
O Valor Presente Líquido (VPL) do projeto J é de

a) R$ 62.509,00
b) R$ 250.000,00
c) R$ 597.550,00
d) R$ 737.305,00
e) R$ 862.509,00

Comentários:

Preste bastante atenção nessa questão pois iremos utilizar a ideia aqui presente em outras resoluções.

Primeiramente, vamos <u>representar graficamente</u> (em milhares) o Projeto de Investimento J.



A **equação** para o cálculo do VPL no tempo $t = 0$ será:

$$VPL = -800 + \frac{300}{(1+0{,}1)^1} + \frac{350}{(1+0{,}1)^2} + \frac{400}{(1+0{,}1)^3}$$

$$VPL = -800 + \frac{300}{1{,}1} + \frac{350}{1{,}21} + \frac{400}{1{,}331}$$

Nesse caso teríamos que multiplicar toda a equação por 1,331 para eliminar o denominador ou então resolver todas essas divisões (o que na hora da prova é bem complicado e trabalhoso). Iremos multiplicar por 1,331.

$$VPL = -800 + \frac{300}{1{,}1} + \frac{350}{1{,}21} + \frac{400}{1{,}331} \quad \times (1{,}331)$$

$$1{,}331 \times VPL = -800 \times 1{,}331 + \frac{300}{1{,}1} \times 1{,}331 + \frac{350}{1{,}21} \times 1{,}331 + \frac{400}{1{,}331} \times 1{,}331$$

$$\mathbf{1,331 \times \mathit{VPL} = -800 \times 1,331 + 300 \times 1,21 + 350 \times 1,1 + 400}$$

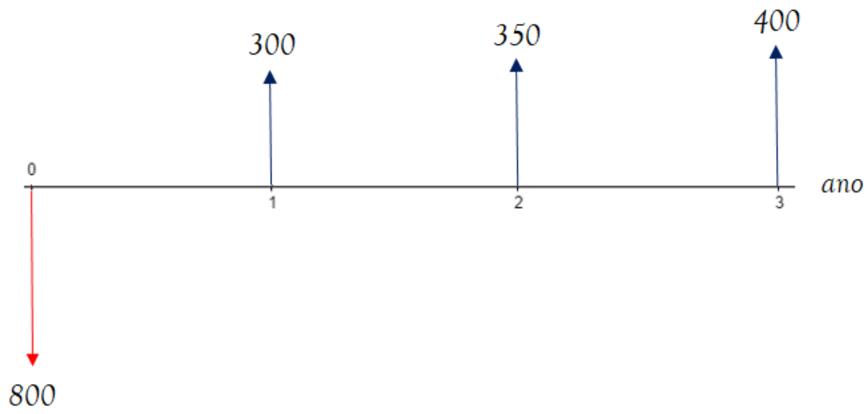
Essa será a equação que iremos resolver para o cálculo do VPL.

Vamos dar uma **pausa** aqui e relembrar a aula passada. Na última aula, em diversas questões, levamos as contas para o futuro ao invés de trazê-las para o presente.

Geralmente, iremos escolher **datas futuras** para calcular o VPL, uma vez que, como estudamos, para transportar para o futuro, multiplicamos as parcelas. Enquanto que, para transportar do futuro para o presente, dividimos. E acredito que multiplicar, na hora da prova, é mais fácil e mais rápido que dividir.

Então, já no início do problema, poderíamos levar todas as parcelas para o futuro e calcular o VPL. E quando levamos para o futuro, multiplicamos por $(1+i)^t$.

Vejamos novamente.



Vamos calcular o VPL com todas as parcelas no tempo $t = 3$.

$$(1+0{,}1)^3 \times VPL = -800 \times (1+0{,}1)^3 + 300 \times (1+0{,}1)^2 + 350 \times (1+0{,}1)^1 + 400$$

$$\mathbf{1{,}331 \times \boldsymbol{VPL} = -800 \times 1{,}331 + 300 \times 1{,}21 + 350 \times 1{,}1 + 400}$$

Observe que essa equação em negrito é **IDÊNTICA** a equação em negrito mais acima referente à primeira passagem da resolução.

Perceba que "cortamos caminho" levando de uma vez todas as parcelas para o futuro e calculando o VPL no tempo $t = 3$.

Vamos continuar e calcular o VPL requerido pela banca.

$$1{,}331 \times VPL = -800 \times 1{,}331 + 300 \times 1{,}21 + 350 \times 1{,}1 + 400$$

$$1{,}331 \times VPL = -1.064{,}80 + 363 + 385 + 400$$

$$1{,}331 \times VPL = 83{,}2$$

$$VPL = \frac{83{,}2}{1{,}331} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{VPL = +62{,}509}}$$

Como representamos no gráfico em milhares, temos que multiplicar agora por mil.

$$\boldsymbol{VPL = +62.509,00}$$

Então, em algumas questões em que o cálculo da divisão seja mais complexo, podemos levar todas as parcelas para o tempo mais à direita e trabalhar com multiplicações.

Gabarito: Alternativa **A**

10. Sistemas de Amortização

45. (FGV - ALERO - 2018) João pediu um financiamento no valor de R$ 60.000,00, a ser pago em 30 parcelas pelo Sistema de Amortização Constante (SAC), com taxa de juros de 2% ao mês, no sistema de juros compostos.

O valor da 3ª parcela a ser paga é

a) R$ 2.120,00
b) R$ 2.840,00
c) R$ 3.120,00
d) R$ 3.200,00
e) R$ 3.460,00

Comentários:

No SAC, as Amortizações são constantes e iguais a:

$$A = \frac{E}{n}$$

$$A = \frac{60.000}{30} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A = 2.000}}$$

Preenchendo a tabela até o terceiro período (período que queremos):

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	60.000
1	60.000	2.000			58.000
2	58.000	2.000			56.000
3	56.000	2.000			

Observe no quadro acima que as Amortizações são constantes e Saldo Devedor final de um período é igual ao Saldo Devedor inicial do período menos a Amortização.

$$SD_{final\ i} = SD_{inicial\ i} - A$$

Sendo assim, já podemos preencher toda a tabela (nos campos que nos interessam) até o terceiro período.

A Prestação do terceiro período será igual a Amortização mais os Juros do terceiro período.

$$P_3 = A + J_3$$

A Amortização nós já calculamos. Vamor calcular os Juros do terceiro período. Os Juros do terceiro período serão iguais a multiplicação da Taxa de Juros pelo Saldo Devedor inicial do terceiro período.

$$J_3 = i \times SD_{inicial\ 3}$$

$$J_3 = 0{,}02 \times 56.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J_3 = 1.120}}$$

Logo, a terceira prestação será:

$$P_3 = A + J_3$$

$$P_3 = 2.000 + 1.120 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P_3 = 3.120}$$

Gabarito: Alternativa **C**

46. (FGV - ALERO - 2018) Um empréstimo habitacional no valor de R$ 60.000,00 será contratado para ser quitado em 50 prestações mensais e consecutivas, vencendo a primeira delas um mês após a data da contratação do empréstimo. O sistema utilizado para a quitação desse empréstimo será o de amortizações constantes à taxa de juros efetiva de 2,5% ao mês.

O valor da 20ª prestação será de

a) R$ 2.100,00

b) R$ 2.130,00
c) R$ 2.150,00
d) R$ 2.160,00
e) R$ 2.200,00

Comentários:

Perceba que nesta questão já seria bem trabalhoso representar, em tabela, os 20 períodos. Na parte teórica, vimos um exemplo deste tipo de cobrança, onde a banca pede uma parcela intermediária de um Empréstimo com longo período de pagamento.

Vamos resolver esta questão de duas maneiras.

- **Primeira resolução: Progressão Aritmética**

Estudamos que no SAC, as Prestações são decrescentes em Progressão Aritmética de razão $r = -i \times A$.

Então, iremos calcular a primeira parcela e, pela fórmula do termo geral, encontraremos o valor da vigésima.

A primeira prestação será igual a soma da Amortização mais os Juros do primeiro período.

$$P_1 = A + J_1$$

No SAC, a Amortização é constante e igual a:

$$A = \frac{E}{n}$$

$$A = \frac{60.000}{50} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A = 1.200}}$$

E os Juros do primeiro período serão iguais a multiplicação da Taxa de Juros pelo Saldo Devedor inicial do primeiro período.

$$J_1 = i \times SD_{inicial\ 1}$$

$$J_1 = 0{,}025 \times 60.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J_1 = 1.500}}$$

Logo, a primeira prestação será:

$$P_1 = A + J_1$$

$$P_1 = 1.200 + 1.500 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{P_1 = 2.700}}$$

Conforme falamos, no SAC, as Prestações são decrescentes em Progressão Aritmética de razão $r = -i \times A$.

Então, pela fórmula do termo geral da PA teremos:

$$a_n = a_1 + (n-1) \times r$$

$$\downarrow \quad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$P_n = P_1 + (n-1) \times r$$

$$P_{20} = P_1 + (20-1) \times r$$

$$P_{20} = P_1 + 19 \times r$$

Perceba que, da equação acima, só nos falta calcular a razão.

$$r = -i \times A$$

$$r = -0{,}025 \times 1.200 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{r = -30}}$$

Substituindo na equação acima e calculando a vigésima prestação:

$$P_{20} = P_1 + 19 \times r$$

$$P_{20} = 2.700 + 19 \times (-30)$$

$$P_{20} = 2.700 - 570 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P_{20} = 2.130}$$

Segunda resolução: Saldo Devedor

A vigésima prestação será igual a:

$$P_{20} = A + J_{20}$$

A Amortização, assim como na primeira resolução, será calculada pela divisão do Empréstimo pela quantidade de períodos (e já calculamos acima).

$$A = 1.200$$

Falta então calcular os Juros da vigésima prestação. Os Juros da visgésima prestação será igual a Taxa de Juros multiplicada pela Saldo Devedor inicial do vigésimo período.

$$J_i = i \times SD_{inicial\ i}$$

$$J_{20} = i \times SD_{inicial\ 20}$$

Estudamos que o Saldo Devedor inicial de um período é igual ao Saldo Devedor final do período anterior. Então:

$$J_{20} = i \times SD_{inicial\ 20}$$

$$J_{20} = i \times SD_{final\ 19}$$

O Saldo Devedor final do período é igual ao valor do Empréstimo menos x vezes o valor da Amortização.

$$SD_{final\ i} = E - x \times A$$

Sendo assim:

$$SD_{final\ 19} = E - 19 \times A$$

$$SD_{final\ 19} = 60.000 - 19 \times 1.200$$

$$SD_{final\ 19} = 60.000 - 22.800 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{SD_{final\ 19} = 37.200}}$$

Substituindo na fórmula dos Juros:

$$J_{20} = i \times SD_{final\ 19}$$

$$J_{20} = 0{,}025 \times 37.200 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J_{20} = 930}}$$

E, por fim, calculamos a vigésima prestação:

$$P_{20} = A + J_{20}$$

$$P_{20} = 1.200 + 930 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P_{20} = 2.130}$$

Gabarito: Alternativa **B**

47. (FGV / BANESTES - 2018) Um financiamento no valor de R$ 18.000,00 foi contratado e deverá ser quitado em 20 prestações mensais e consecutivas, vencendo a primeira delas um mês após a data da contratação do financiamento. Foi adotado o Sistema de Amortizações Constantes (SAC.) a uma taxa de juros efetiva de 3,0% ao mês.

A diferença entre os valores de duas prestações consecutivas quaisquer é sempre igual a:

a) R$ 30,00
b) R$28,00
c) R$ 27,50
d) R$ 27,00

e) R$ 25,50

Comentários:

Estudamos que no SAC as prestações são **decrescentes** em PROGRESSÃO ARITMÉTICA (PA) de razão:

$$r = -i \times A$$

Ou seja, a diferença entre os valores de duas prestações consecutivas quaisquer será sempre igual a esta multiplicação.

No SAC, as Amortizações são constantes e iguais a:

$$A = \frac{E}{n}$$

$$A = \frac{18.000}{20} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A = 900}}$$

De posse da Amortização e da Taxa de Juros (fornecida no enunciado), calculamos o valor da razão.

$$r = -i \times A$$

$$r = -0{,}03 \times 900 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{r = -27}$$

Gabarito: Alternativa **D**

48. (FGV / Pref. Niterói - 2015) Considere a amortização de uma dívida pelo Sistema francês de amortização - tabela Price em três pagamentos, vencendo a primeira prestação um período após a liberação dos recursos, sendo que as duas primeiras parcelas de amortização são R$ 5.000,00 e R$ 5.500,00, respectivamente.

O valor de cada prestação, em reais, é:

a) 5.250
b) 5.500
c) 5.516
d) 6.050
e) 6.655

Comentários:

Estudamos que no SF **as Amortizações são crescentes em Progressão Geométrica (PG) de razão** $\boldsymbol{q = (1 + i)}$.

O enunciado nos fornece o valor da primeira e da segunda parcela de Amortização. Sendo assim, podemos calcular o valor da taxa de juros.

$$A_2 = A_1 \times q$$

$$A_2 = A_1 \times (1 + i)$$

$$5.500 = 5.000 \times (1 + i)$$

$$(1 + i) = \frac{5.500}{5.000}$$

$$1 + i = 1{,}1$$

$$i = 1{,}1 - 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{i = 0{,}1}}$$

De posse da taxa, podemos aplicar novamente a fórmula do termo geral da PG e calcular o valor da terceira Amortização.

$$A_3 = A_2 \times q$$

$$A_3 = A_2 \times (1 + i)$$

$$A_3 = 5.500 \times (1 + 0{,}1)$$

$$A_3 = 5.500 \times 1{,}1 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A_3 = 6.050}}$$

Com o valor de todas as Amortizações, calcularemos o valor do Empréstimo, uma vez que o valor total do Empréstimo é dado pelo somatório de tudo que foi Amortizado.

$$E = A_1 + A_2 + A_3$$

$$E = 5.000 + 5.500 + 6.050 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{E = 16.550}}$$

Sabemos que as Prestações são constantes no SF. Então, podemos calcular o valor da Prestação em qualquer período que ela se manterá a mesma.

Vamos calcular o valor da Prestação no primeiro período que será igual a soma da Amortização (já fornecida no enunciado) mais os Juros.

$$P = A_1 + J_1$$

Iremos, então, calcular os Juros do primeiro período. Os Juros são calculados pela multiplicação da Taxa de Juros vezes o Saldo Devedor inicial do período. Logo,

$$J_1 = i \times SD_{inicial\ 1}$$

$$J_1 = 0{,}1 \times 16.550 \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{J_1 = 1.655}}$$

Observe que o Saldo Devedor inicial do primeiro período é o próprio valor do Empréstimo, já que ainda não houve nenhuma Amortização.

Por fim, teremos o valor da Prestação igual a:

$$P = A_1 + J_1$$

$$P = 5.000 + 1.655 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P = 6.655}$$

Gabarito: Alternativa **E**

49. (FGV / ISS Pref. Niterói RJ - 2015) Considere a amortização de uma dívida pelo Sistema francês de amortização - tabela Price em três pagamentos, vencendo a primeira prestação um período após a liberação dos recursos, sendo que as duas primeiras parcelas de amortização são R$ 5.000,00 e R$ 5.500,00, respectivamente.

O valor de cada prestação, em reais, é:

a) 5.250
b) 5.500
c) 5.516
d) 6.050
e) 6.655

Comentários:

No SF as Prestações são constantes. Então, podemos calcular o valor da primeira prestação que acharemos a resposta, já que, como acabamos de falar, todas têm o mesmo valor.

A **primeira Prestação** será igual a:

$$P = A_1 + J_1$$

O valor da primeira Amortização é forncedio no enunciado. Precisamos, então, calcular os Juros do primeiro período.

Os Juros do primeiro período serão iguais a multiplicação da Taxa de Juros pelo Saldo Devedor inicial do primeiro período (que é igual ao valor do Empréstimo).

$$J_1 = i \times SD_{inicial\ 1}$$

$$J_1 = i \times E \quad equação\ (I)$$

Iremos "segurar" esta equação e calcular separadamente o valor da Taxa de Juros e do Empréstimo.

- **Taxa de Juros**

Estudamos que no SF **as Amortizações são crescentes em Progressão Geométrica** (PG) de razão $q = 1 + i$.

Então, a segunda Amortização será igual a primeira Amortização vezes a razão.

$$A_2 = A_1 \times q$$

$$A_2 = A_1 \times (1 + i)$$

Vamos substituir os valores e calcular o valor da Taxa de Juros.

$$A_2 = A_1 \times (1 + i)$$

$$5.500 = 5.000 \times (1 + i)$$

$$(1 + i) = \frac{5.500}{5.000}$$

$$1 + i = 1{,}1$$

$$i = 1{,}1 - 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{i = 0{,}1 \; ou \; 10\%}}$$

- **Empréstimo**

E, de posse da Taxa de Juros, podemos calcular a terceira parcela da Amortização. Estamos fazendo isso para poder calcular o valor total do financiamento, uma vez que o valor do financiamento é igual ao somatório de todas as parcelas de Amortiazação.

A terceira Amortização será igual a segunda Amortização vezes a razão.

$$A_3 = A_2 \times (1 + i)$$

$$A_3 = 5.500 \times (1 + 0{,}1)$$

$$A_3 = 5.500 \times 1{,}1 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A_3 = 6.050}}$$

E assim, o Empréstimo que foi pago em três parcelas terá sido de:

$$E = A_1 + A_2 + A_3$$

$$E = 5.000 + 5.500 + 6.050 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{E = 16.550}}$$

Agora, voltaremos na equação (I):

$$J_1 = i \times E$$

$$J_1 = 0{,}1 \times 16.550 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J_1 = 1.655}}$$

Por fim, calculamos a Prestação pela equação inicial da nossa resolução:

$$P = A_1 + J_1$$

$$P = 5.000 + 1.655 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P = 6.655}$$

Gabarito: Alternativa **E**

50. (FGV / SEFAZ RJ - 2011) A respeito dos sistemas de amortização, analise as afirmativas a seguir:

I. As prestações do Sistema Francês são maiores que aquelas do SAC, dados os mesmos juros, valor inicial e período de amortização.

II. As prestações do Sistema Francês são decrescentes e, portanto, iniciam-se maiores que aquelas do SAC, dados os mesmos juros, valor inicial e período de amortização.

III. As prestações do Sistema Francês são constantes e, portanto, iniciam-se menores que aquelas do SAC, dados os mesmos valor inicial, taxa de juros e período de amortização.

Assinale

a) se apenas a afirmativa I estiver correta.
b) se apenas as afirmativas I e II estiverem corretas.
c) se apenas as afirmativas I e III estiverem corretas.
d) se apenas a afirmativa III estiver correta.
e) se apenas a afirmativa II estiver correta.

Comentários:

Vamos analisar item a item com base na relação teórica que estudar na teoria. Para um **mesmo valor de empréstimo com prazo de operação e taxa de juros idênticos**, as Prestações são ordenadas, em termos de valor, na seguinte ordem:

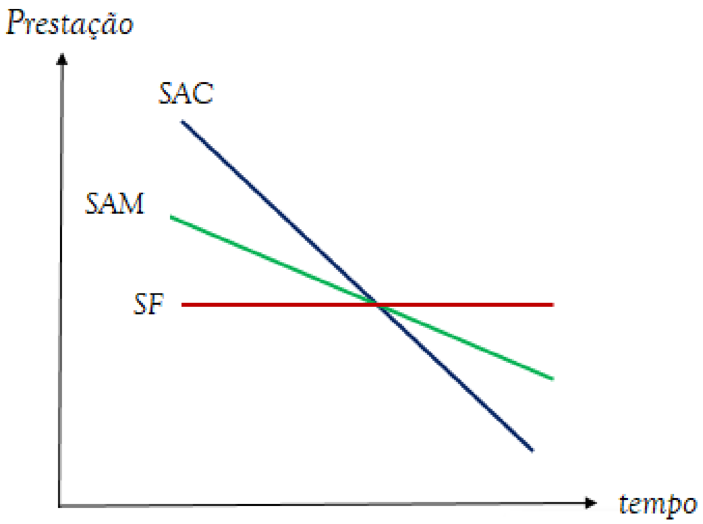
- **Primeira Prestação**

$$\boxed{1° \ Prestação: \ \ SAC > SAM > SF}$$

- **Última Prestação**

$$\boxed{Última \ Prestação: \ \ SF > SAM > SAC}$$

Graficamente, podemos representar da seguinte maneira:



I. As prestações do Sistema Francês são maiores que aquelas do SAC, dados os mesmos juros, valor inicial e período de amortização.

INCORRETO. Pela relação, vemos que as Prestações no SAC, inicialmente, são maiores que as Prestações no SF.

As Prestações do SF só serão maiores que as Prestações do SAC na parte final do pagamento do financiamento.

II. As prestações do Sistema Francês são decrescentes e, portanto, iniciam-se maiores que aquelas do SAC, dados os mesmos juros, valor inicial e período de amortização.

INCORRETO. Dois erros. Vejamos:

"As prestações do Sistema Francês são decrescentes." As Prestações do SF são **CONSTANTES**. Logo, já poderíamos marcar item errado.

"As prestações do Sistema Francês ... iniciam-se maiores que aquelas do SAC". Vimos, pelo gráfico acima, que as Prestações no SAC, inicialmente, são maiores que as Prestações no SF.

III. As prestações do Sistema Francês são constantes e, portanto, iniciam-se menores que aquelas do SAC, dados os mesmos valor inicial, taxa de juros e período de amortização.

CORRETO. Perfeito. Pela relação gráfica, estudamos que as Prestações do SF (que são constantes) iniciam-se menores que aquelas do SAC dados os mesmos valor inicial, taxa de juros e período de amortização.

Gabarito: Alternativa **D**

Questão Bônus - (FGV / BANESTES - 2018) Considere um sistema misto de amortização de financiamentos em que cada prestação é a média aritmética entre as prestações correspondentes nos sistemas SAC e Price, nas mesmas condições.

Um empréstimo de R$ 30.000,00 será quitado em 6 prestações mensais, sendo a primeira delas paga um mês após a contratação do empréstimo. A taxa efetiva de juros utilizada é de 7% a.m..

Se o sistema utilizado para a quitação desse empréstimo for o descrito acima, a diferença positiva entre as duas primeiras prestações será igual a:

Dado: $1{,}07^6 = 1{,}5$

a) R$ 210,00
b) R$ 200,00
c) R$ 195,00
d) R$ 185,00
e) R$ 175,00

Comentários:

Iremos resolver esta questão da maneira completa e da maneira "bizurada".

No SAM cada prestação é a média aritmética entre as prestações correspondentes nos sistemas SAC e Price.

$$P_{SAM} = \frac{P_{SAC} + P_{SF}}{2}$$

Vamos calcular separadamente as prestações por cada Sistema de Amortização.

- **SF**

No SF, as Prestações são constantes e calculadas pela seguinte fórmula:

$$E = P \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i \times (1+i)^n}\right]$$

$$30.000 = P \times \left[\frac{(1+0{,}07)^6 - 1}{0{,}07 \times (1+0{,}07)^6}\right]$$

Observe que o enunciado nos fornece o valor da potência $1{,}07^6 = 1{,}5$.

$$30.000 = P \times \left[\frac{1{,}5 - 1}{0{,}07 \times 1{,}5}\right]$$

$$30.000 = P \times \left[\frac{0{,}5}{0{,}07 \times 1{,}5}\right]$$

$$P = \frac{30.000 \times 0{,}07 \times 1{,}5}{0{,}5} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{P = 6.300}}$$

SAC

Iremos começar calculando o valor da Amortização e do Juros do primeiro período (vamos acelerar a resolução).

No SAC, as Amortizações são constantes e iguais a:

$$A = \frac{E}{n}$$

$$A = \frac{30.000}{6} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A = 5.000}}$$

Os Juros do primeiro período serão iguais a:

$$J_1 = i \times SD_{inicial\ 1}$$

$$J_1 = 0{,}07 \times 30.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J_1 = 2.100}}$$

De posse desses valores, podemos preencher nossa tabela auxiliar.

p	$SD_{inicial}$	A	J	P	SD_{final}
0	-	-	-	-	30.000
1	30.000	5.000	2.100	$5.000 + 2.100 = \mathbf{7.100}$	25.000
2	25.000	5.000			

Observe que a Prestação é dada pela soma da Amortização e dos Juros do período.

Iremos, agora, calcular os Juros do segundo período.

$$J_2 = i \times SD_{inicial\ 2}$$

$$J_2 = 0{,}07 \times 25.000 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{J_2 = 1.750}}$$

Logo, a segunda prestação será:

$$P_2 = A + J_2$$

$$P_2 = 5.000 + 1.750 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{P_2 = 6.750}}$$

De posse das prestações, voltamos ao início da resolução e calculamos as Prestações pelo SAM.

- Primeira Prestação:

$$P_{1\ SAM} = \frac{P_{1\ SAC} + P_{1\ SF}}{2}$$

$$P_{1\ SAM} = \frac{7.100 + 6.300}{2}$$

$$P_{1\ SAM} = \frac{13.400}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{P_{1\ SAM} = 6.700}}$$

- Segunda Prestação:

$$P_{2\ SAM} = \frac{P_{2\ SAC} + P_{2\ SF}}{2}$$

$$P_{2\ SAM} = \frac{6.750 + 6.300}{2}$$

$$P_{2\ SAM} = \frac{13.050}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{P_{2\ SAM} = 6.525}}$$

Logo, a diferença positiva entre as duas primeiras prestações será igual a:

$$d = 6.700 - 6.525 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{d = 175}$$

Vamos, agora, resolver da segunda maneira que requer um **domínio um pouco maior na parte de álgebra** da matemática básica.

A questão busca a diferença entre:

$$d = P_{1\,SAM} - P_{2\,SAM}$$

Vamos expandir esta diferença.

$$d = \frac{P_{1\,SAC} + P_{1\,SF}}{2} - \frac{P_{2\,SAC} + P_{2\,SF}}{2}$$

Manipulando algebricamente:

$$d = \frac{P_{1\,SAC}}{2} + \frac{P_{1\,SF}}{2} - \frac{P_{2\,SAC}}{2} - \frac{P_{2\,SF}}{2}$$

Sabemos que no SF, as Parcelas são constantes. Logo,

$$d = \frac{P_{1\,SAC}}{2} + \cancel{\frac{P_{1\,SF}}{2}} - \frac{P_{2\,SAC}}{2} - \cancel{\frac{P_{2\,SF}}{2}}$$

$$d = \frac{P_{1\,SAC}}{2} - \frac{P_{2\,SAC}}{2} = \frac{P_{1\,SAC} - P_{2\,SAC}}{2}$$

Ou seja, a diferença que buscamos se resumiu à diferença entre as Prestações no SAC divididos por 2.

Estudamos que no SAC as Prestações são decrescentes em PA de razão $r = -i \times A$.

Ou seja, duas prestações seguidas (que é o nosso caso) sempre irão ter uma diferença, no SAC, de valor igual a $i \times A$.

Substituindo na equação acima:

$$d = \frac{P_{1\,SAC} - P_{2\,SAC}}{2}$$

$$\boxed{d = \frac{i \times A}{2}}$$

Então, todo nosso problema estaria resumido em calcular o valor da Amortização no SAC.

No SAC, as Amortizações são constantes e iguais a:

$$A = \frac{E}{n}$$

$$A = \frac{30.000}{6} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A = 5.000}}$$

Logo, a diferença d será igual a:

$$d = \frac{i \times A}{2}$$

$$d = \frac{0{,}07 \times 5.000}{2}$$

$$d = \frac{350}{2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{d = 175}$$

Gabarito: Alternativa **E**