Oi, pessoal!!

Aqui quem vos fala é o professor Guilherme Neves.

Vamos resolver as prova de Estatística e Raciocínio Lógico da prova para Agente da Polícia Federal (CESPE/2018).

Para **tirar dúvidas** e ter **acesso a dicas e conteúdos gratuitos**, acesse minhas redes sociais:

Instagram - @profguilhermeneves
https://www.instagram.com/profguilhermeneves

Canal do YouTube – Prof. Guilherme Neves
https://youtu.be/gqab047D9l4

E-mail: profguilhermeneves@gmail.com

LISTA DE QUESTÕES SEM COMENTÁRIOS – PF 2018/AGENTE

Determinado órgão governamental estimou que a probabilidade p de um ex-condenado voltar a ser condenado por algum crime no prazo de 5 anos, contados a partir da data da libertação, seja igual a 0,25. Essa estimativa foi obtida com base em um levantamento por amostragem aleatória simples de 1.875 processos judiciais, aplicando-se o método da máxima verossimilhança a partir da distribuição de Bernoulli.

Sabendo que $P(Z < 2) = 0{,}975$, em que Z representa a distribuição normal padrão, julgue os itens que se seguem, em relação a essa situação hipotética.

41. Em um grupo formado aleatoriamente por 4 ex-condenados libertos no mesmo dia, estima-se que a probabilidade de que apenas um deles volte a ser condenado por algum crime no prazo de 5 anos, contados a partir do dia em que eles foram libertados, seja superior a 0,4.

42. O erro padrão da estimativa da probabilidade p foi igual a 0,01.

43. A estimativa intervalar 0,25 ± 0,05 representa o intervalo de 95% de confiança do parâmetro populacional p.

44. Se X seguir uma distribuição binomial com parâmetros $n = 1.000$ e probabilidade de sucesso p, a estimativa de máxima verossimilhança da média de X será superior a 300.

Um pesquisador estudou a relação entre a taxa de criminalidade (Y) e a taxa de desocupação da população economicamente ativa (X) em determinada região do país. Esse pesquisador aplicou um modelo de regressão linear simples na forma $y = bX + a + \varepsilon$, em que b representa o coeficiente angular, a é o intercepto do modelo e ε denota o erro aleatório com média zero e variância σ^2. A tabela a seguir representa a análise de variância (ANOVA) proporcionada por esse modelo.

fonte de variação	graus de liberdade	soma de quadrados
modelo	1	225
erro	899	175
total	900	400

A respeito dessa situação hipotética, julgue os próximos itens, sabendo que $b > 0$ e que o desvio padrão amostral da variável X é igual a 2.

45. A correlação linear de Pearson entre a variável resposta Y e a variável regressora X é igual a 0,75.

46. A estimativa da variância σ^2 é superior a 0,5.

47. A estimativa do coeficiente angular b, pelo método de mínimos quadrados ordinários, é igual a 0,25.

O valor diário (em R$ mil) apreendido de contrabando em determinada região do país é uma variável aleatória W que segue distribuição normal com média igual a R$ 10 mil e desvio padrão igual a R$ 4 mil.

Nessa situação hipotética,

48. se W_1 e W_2 forem duas cópias independentes e identicamente distribuídas como W, então a soma $W_1 + W_2$ seguirá distribuição normal com média igual a R$ 20 mil e desvio padrão igual a R$ 8 mil.

49. $P(W > R\$\, 10\, mil) = 0{,}5$

50. a razão $\frac{W-20}{\sqrt{4}}$ segue distribuição normal padrão.

As proposições P, Q e R a seguir referem-se a um ilícito penal envolvendo João, Carlos, Paulo e Maria.

P: “João e Carlos não são culpados”.

Q: “Paulo não é mentiroso”.

R: “Maria é inocente”.

Considerando que ~X representa a negação da proposição X, julgue os itens a seguir.

51. As proposições P, Q e R são proposições simples.

52. A proposição “Se Paulo é mentiroso, então Maria é culpada” pode ser representada simbolicamente por $(\sim Q) \leftrightarrow (\sim R)$.

53. Se ficar comprovado que apenas um dos quatro envolvidos no ilícito penal é culpado, então a proposição simbolizada por $(\sim P) \rightarrow (\sim Q) \vee R$ será verdadeira.

54. Independentemente de quem seja culpado, a proposição $\{P \rightarrow (\sim Q)\} \rightarrow \{Q \vee [(\sim Q) \vee R]\}$ será sempre verdadeira, isto é, será uma tautologia.

55. As proposições $P \wedge (\sim Q) \rightarrow (\sim R)$ e $R \rightarrow [Q \wedge (\sim P)]$são equivalentes.

56. Se as três proposições P, Q e R forem falsas, então pelo menos duas das pessoas envolvidas no ilícito penal serão culpadas.

Em um aeroporto, 30 passageiros que desembarcaram de determinado voo e que estiveram nos países A, B ou C, nos quais ocorre uma epidemia infecciosa, foram selecionados para ser examinados. Constatou-se que exatamente 25 dos passageiros selecionados estiveram em A ou em B, nenhum desses 25 passageiros esteve em C e 6 desses 25 passageiros estiveram em A e em B.

Com referência a essa situação hipotética, julgue os itens que se seguem.

57. Se 11 passageiros estiveram em B, então mais de 15 estiveram em A.

58. Se 2 dos 30 passageiros, selecionados forem escolhidos ao acaso, então a probabilidade de esses 2 passageiros terem estado em 2 desses países é inferior a 1/30.

59. A quantidade de maneiras distintas de se escolher 2 dos 30 passageiros selecionados de modo que pelo menos um deles tenha estado em C é superior a 100.

60. Considere que, separando-se o grupo de passageiros selecionados que visitou o país A, o grupo que visitou o país B e o grupo que visitou o país C, seja verificado, em cada um desses grupos, que pelo menos a metade dos seus componentes era do sexo masculino. Nessa situação, conclui-se que o grupo de 30 passageiros selecionados tem, no máximo, 14 mulheres.

GABARITOS

GABARITO

41. Certo
42. Certo
43. Errado
44. Errado
45. Certo
46. Errado
47. Certo
48. Errado
49. Certo
50. Errado
51. Anulada
52. Errado
53. Certo
54. Certo
55. Errado
56. Certo
57. Certo
58. Errado
59. Certo
60. Errado

(CESPE 2018/Polícia Federal – Agente)

Determinado órgão governamental estimou que a probabilidade p de um ex-condenado voltar a ser condenado por algum crime no prazo de 5 anos, contados a partir da data da libertação, seja igual a 0,25. Essa estimativa foi obtida com base em um levantamento por amostragem aleatória simples de 1.875 processos judiciais, aplicando-se o método da máxima verossimilhança a partir da distribuição de Bernoulli.

Sabendo que $P(Z < 2) = 0{,}975$, em que Z representa a distribuição normal padrão, julgue os itens que se seguem, em relação a essa situação hipotética.

41. Em um grupo formado aleatoriamente por 4 ex-condenados libertos no mesmo dia, estima-se que a probabilidade de que apenas um deles volte a ser condenado por algum crime no prazo de 5 anos, contados a partir do dia em que eles foram libertados, seja superior a 0,4.

42. O erro padrão da estimativa da probabilidade p foi igual a 0,01.

43. A estimativa intervalar 0,25 ± 0,05 representa o intervalo de 95% de confiança do parâmetro populacional p.

44. Se X seguir uma distribuição binomial com parâmetros $n = 1.000$ e probabilidade de sucesso p, a estimativa de máxima verossimilhança da média de X será superior a 300.

Resolução

41. Em um grupo formado aleatoriamente por 4 ex-condenados libertos no mesmo dia, estima-se que a probabilidade de que apenas um deles volte a ser condenado por algum crime no prazo de 5 anos, contados a partir do dia em que eles foram libertados, seja superior a 0,4.

É importante notar que, na distribuição binomial, a amostra deve ser obtida com reposição.

Por quê? Para que a probabilidade de um ex-condenado sorteado ao acaso seja sempre igual a 0,25.

Se o processo é feito sem reposição, essa probabilidade não é constante.

Para exemplificar, imagine que a população seja formada por 100 pessoas. Assim, há 25 ex-condenados que voltam a ser condenados por algum crime no prazo de 5 anos (isso porque o problema diz que a probabilidade é de 0,25).

A probabilidade de a primeira pessoa sorteada possuir tal característica é 25/100 = 0,25.

Se o processo é feito com reposição, a probabilidade de a segunda pessoa sorteada também possuir tal característica continua sendo 25/100.

Entretanto, se o processo é feito sem reposição, a probabilidade de a segunda pessoa sorteada possui tal característica é 24/99.

Como o problema diz que será formado um grupo com 4 ex-condenados libertos no mesmo dia, devemos interpretar que são 4 pessoas diferentes. Logo, a amostra de 4 pessoas não foi feita com reposição.

Como o processo foi feito sem reposição, temos uma distribuição hipergeométrica. Entretanto, não temos como resolver o problema, pois não sabemos o tamanho da população.

Ora, observe que, no exemplo anterior, a probabilidade de sucesso quando o processo é feito com reposição é sempre igual a 25%, mas quando o processo é feito sem reposição, a probabilidade é calculada a partir do tamanho da população.

Sendo assim, não temos como resolver o problema pela distribuição hipergeométrica.

Aí é que vem o pulo do gato: a população é muito grande (observe que a primeira amostra realizada era composta de 1.875 processos) e, portanto, a probabilidade de sucesso é praticamente constante.

Para exemplificar, imagine que a população seja de 10.000 pessoas. Assim, há 2.500 pessoas com tal característica.

Assim, a probabilidade de o primeiro sorteado possuir tal característica é de 2.500/10.000 = 0,25.

Como o processo é feito sem reposição, a probabilidade de o segundo possuir tal característica é 2.499/9.999 = 0,2499...

Em suma: quando a população for muito grande, a distribuição hipergeométrica pode ser aproximada por uma distribuição binomial.

Portanto, temos uma variável binomial com $n = 4$ (porque são 4 pessoas sorteadas) e $p = 0{,}25$ (probabilidade de sucesso). Queremos calcular a probabilidade de exatamente 1 desses sorteados voltar a ser condenado, ou seja, queremos calcular a probabilidade de obtermos exatamente 1 sucesso.

$$P(X = 1) = \binom{4}{1} \cdot p^1 q^3 = 4pq^3 = 4 \cdot 0{,}25^1 \cdot 0{,}75^3$$

$$= 4 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64} \cong 0{,}42$$

O item 41 está certo.

Vamos ao item 42.

42. O erro padrão da estimativa da probabilidade p foi igual a 0,01.

A proporção amostral $\hat{p}$ é uma variável aleatória com média e variância dadas por:

$$E(\hat{p}) = p$$

$$Var(\hat{p}) = \frac{pq}{n}$$

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

Não precisamos utilizar o fator de correção para população finita justamente porque estamos considerando que a população é infinita.

Na verdade, deveríamos utilizar os valores populacionais de p e q. Como não sabemos esses valores, devemos utilizar suas estimativas $\hat{p}$ e $\hat{q}$ obtidas na amostra.

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}25 \times 0{,}75}{1.875}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{4} \times \frac{3}{4}}{1.875}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{1.875}}$$

$$= \frac{1}{4} \times \sqrt{\frac{1}{625}} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{25} = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

O item 42 está certo.

Vamos agora ao item 43.

43. A estimativa intervalar 0,25 ± 0,05 representa o intervalo de 95% de confiança do parâmetro populacional p.

O problema informou que $P(Z < 2) = 0{,}975$.

Como a área total abaixo da curva de distribuição normal é 1, temos que $P(Z > 2) = 1 - 0{,}975 = 0{,}025$.

Sabemos que $P(Z > 0) = 0{,}50$. Logo, $P(0 < Z < 2) = 0{,}50 - 0{,}025 = 0{,}475$.

Pela simetria da distribuição normal, temos que $P(-2 < Z < 2) = 2 \times 0{,}475 = 0{,}95$.

Portanto, para construir um intervalo de 95% de confiança, devemos utilizar $Z_0 = 2$.

Os extremos do intervalo são dados por:

$$\hat{p} \pm Z_0 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

Já calculamos $\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 0{,}01$ no item anterior. Logo,

$$0{,}25 \pm 2 \times 0{,}01 =$$

$$= 0{,}25 \pm 0{,}02$$

O item 43 está errado.

Finalmente, vamos ao item 44.

44. Se X seguir uma distribuição binomial com parâmetros $n = 1.000$ e probabilidade de sucesso p, a estimativa de máxima verossimilhança da média de X será superior a 300.

A média da distribuição binomial é dada por np. Assim, a estimativa da média é igual a

$$n\hat{p} = 1.000 \times 0{,}25 = 250$$

O item 44 está errado.

Gabarito: 41-Certo, 42-Certo, 43-Errado, 44-Errado

(CESPE 2018/Polícia Federal – Agente)

Um pesquisador estudou a relação entre a taxa de criminalidade (Y) e a taxa de desocupação da população economicamente ativa (X) em determinada região do país. Esse pesquisador aplicou um modelo de regressão linear simples na forma $y = bX + a + \varepsilon$, em que b representa o coeficiente angular, a é o intercepto do modelo e ε denota o erro aleatório com média zero e variância σ^2. A tabela a seguir representa a análise de variância (ANOVA) proporcionada por esse modelo.

fonte de variação	graus de liberdade	soma de quadrados
modelo	1	225
erro	899	175
total	900	400

A respeito dessa situação hipotética, julgue os próximos itens, sabendo que $b > 0$ e que o desvio padrão amostral da variável X é igual a 2.

45. A correlação linear de Pearson entre a variável resposta Y e a variável regressora X é igual a 0,75.

46. A estimativa da variância σ^2 é superior a 0,5.

47. A estimativa do coeficiente angular b, pelo método de mínimos quadrados ordinários, é igual a 0,25.

Resolução

Comecemos pelo item 45.

45. A correlação linear de Pearson entre a variável resposta Y e a variável regressora X é igual a 0,75.

O coeficiente de correlação linear de Pearson (R) é a raiz quadrada do coeficiente de determinação (R^2).

O coeficiente de determinação é a razão entre a soma de quadrados do modelo e a soma de quadrados total.

$$R^2 = \frac{SQM}{SQT} = \frac{225}{400}$$

Logo, o valor de R é

$$R = \sqrt{\frac{225}{400}} = \frac{15}{20} = 0{,}75$$

O item 45 está certo.

Vamos ao item 46.

46. A estimativa da variância σ^2 é superior a 0,5.

A estimativa de σ^2 corresponde ao quadrado médio dos erros (dentro).

O quadrado médio dos resíduos QMR corresponde à estimativa da variância σ^2 residual.

$$\sigma^2 = QMR = \frac{SQ_{resíduos}}{graus\ de\ liberdade} = \frac{175}{899} \cong 0{,}19$$

O item 46 está errado.

Vamos ao item 47.

47. A estimativa do coeficiente angular b, pelo método de mínimos quadrados ordinários, é igual a 0,25.

Nesse ponto, vale a pena relembrar a tabela padrão da ANOVA.

Fonte de Variação	Graus de Liberdade	Soma de Quadrados	Quadrados Médios	F
Modelo	1	SQM	$QMM = \dfrac{SQM}{1}$	$F_{teste} = \dfrac{QMM}{QMR}$
Resíduos	$n-2$	SQR	$QMR = \dfrac{SQR}{n-2}$	
Total	$n-1$	SQT	$QMT = \dfrac{SQT}{n-1}$	

Assim, pela tabela, sabemos que $n - 1 = 900$.

Sabemos que o desvio padrão amostral é igual a 2. Logo, a variância amostral é igual a 4. Vamos aplicar a fórmula da variância amostral.

$$s^2 = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

Substituindo os valores, temos:

$$4 = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{900}$$

$$\sum(X_i - \bar{X})^2 = 3.600$$

A tabela informa que a soma de quadrados total é 400, ou seja,

$$\sum(Y_i - \bar{Y})^2 = 400$$

No item 45, nós calculamos o coeficiente de correlação.

$$R = 0{,}75$$

Vamos aplicar a fórmula do coeficiente de correlação.

$$r = \frac{\sum[(X_i - \bar{X}) \cdot (Y_i - \bar{Y})]}{\sqrt{\sum(X_i - \bar{X})^2 \cdot \sum(Y_i - \bar{Y})^2}}$$

$$0{,}75 = \frac{\sum[(X_i - \bar{X}) \cdot (Y_i - \bar{Y})]}{\sqrt{3.600 \times 400}}$$

$$0{,}75 = \frac{\sum[(X_i - \bar{X}) \cdot (Y_i - \bar{Y})]}{60 \times 20}$$

$$0{,}75 = \frac{\sum[(X_i - \bar{X}) \cdot (Y_i - \bar{Y})]}{1.200}$$

$$\sum[(X_i - \bar{X}) \cdot (Y_i - \bar{Y})] = 0{,}75 \times 1.200$$

$$\sum[(X_i - \bar{X}) \cdot (Y_i - \bar{Y})] = 900$$

Vamos agora aplicar a fórmula do coeficiente b.

$$b = \frac{\sum(X_i - \overline{X})((Y_i - \overline{Y})}{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2}$$

$$b = \frac{900}{3.600} = 0{,}25$$

O item 47 está certo.

Gabarito: 45-Certo, 46-Errado, 47-Certo

(CESPE 2018/Polícia Federal – Agente)

O valor diário (em R$ mil) apreendido de contrabando em determinada região do país é uma variável aleatória W que segue distribuição normal com média igual a R$ 10 mil e desvio padrão igual a R$ 4 mil.

Nessa situação hipotética,

48. se W_1 e W_2 forem duas cópias independentes e identicamente distribuídas como W, então a soma $W_1 + W_2$ seguirá distribuição normal com média igual a R$ 20 mil e desvio padrão igual a R$ 8 mil.

49. $P(W > R\$\ 10\ mil) = 0{,}5$

50. a razão $\frac{W-20}{\sqrt{4}}$ segue distribuição normal padrão.

Resolução

Comecemos pelo item 48.

48. se W_1 e W_2 forem duas cópias independentes e identicamente distribuídas como W, então a soma $W_1 + W_2$ seguirá distribuição normal com média igual a R$ 20 mil e desvio padrão igual a R$ 8 mil.

Vamos relembrar propriedades das variáveis aleatórias.

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

Essa propriedade diz que a média da soma de duas variáveis aleatórias é igual à soma das médias.

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2 \cdot cov(X,Y)$$

Se as variáveis X e Y são independentes, temos que $cov(X,Y) = 0$ e, consequentemente,

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$$

Além disso, é importante também lembrar que a soma de variáveis normais é uma variável normal.

Sabemos que W_1 e W_2 são variáveis normais **independentes**. Cada uma delas tem média $R\$\ 10\ mil$ e desvio padrão $R\$\ 4\ mil$.

Logo, a soma $W_1 + W_2$ também tem distribuição normal. Sua média e variância são dadas por:

$$E(W_1 + W_2) = E(W_1) + E(W_2) = 10\ mil + 10\ mil = 20\ mil$$

$$Var(W_1 + W_2) = Var(W_1) + Var(W_2) = (4\ mil)^2 + (4\ mil)^2 = 16\ (mil)^2 + 16(mil)^2 = 32\ (mil)^2$$

Portanto, o desvio padrão de $W_1 + W_2$ é:

$$\sigma_{W_1+W_2} = \sqrt{32(mil)^2} = \sqrt{32}\ mil$$

Como $\sqrt{36} = 6$, então o desvio padrão é menor do que 6 mil. O item está errado.

Veja que essa propriedade que acabamos de utilizar é válida para duas variáveis aleatórias quaisquer.

Vamos ao item 49.

49. $\boldsymbol{P(W > R\$\,10\,mil) = 0,5}$

Sabemos que W tem distribuição normal com média igual a R$ 10 mil e desvio padrão igual a R$ 4 mil.

Sendo μ a média, sabemos que $P(W > \mu) = 0{,}5$, pois a distribuição normal é simétrica em relação à média.

Logo, $P(W > 10\,mil) = 0{,}5$. O item 49 está certo.

É importante notar ainda que como W é uma variável aleatória contínua, a probabilidade de ela assumir um valor específico é igual a 0. Assim, se a questão perguntasse, por exemplo, o valor de $P(W = 10\,mil)$, a resposta seria zero.

Finalmente, vamos ao item 50.

50. a razão $\boldsymbol{\frac{W-20}{\sqrt{4}}}$ **segue distribuição normal padrão.**

Vamos relembrar. Seja X uma variável aleatória normal com média μ e desvio padrão σ. A variável aleatória

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

tem distribuição normal de média 0 e desvio padrão unitário. Tal distribuição Z é denominada **distribuição normal padrão**.

A variável W tem média 10 mil e desvio padrão 4 mil.

Assim, para transformar W em uma distribuição normal padrão, deveríamos subtrair a média (10 mil) e dividir pelo desvio padrão (4 mil).

Logo, a variável

$$Z = \frac{X - 10\,mil}{4\,mil}$$

tem distribuição normal padrão.

O item 50 está errado.

Gabarito: 48-Errado, 49-Certo, 50-Errado

(CESPE 2018/Polícia Federal – Agente)

As proposições P, Q e R a seguir referem-se a um ilícito penal envolvendo João, Carlos, Paulo e Maria.

P: “João e Carlos não são culpados”.

Q: “Paulo não é mentiroso”.

R: “Maria é inocente”.

Considerando que ~X representa a negação da proposição X, julgue os itens a seguir.

51. As proposições P, Q e R são proposições simples.

52. A proposição “Se Paulo é mentiroso, então Maria é culpada” pode ser representada simbolicamente por $(\sim Q) \leftrightarrow (\sim R)$.

53. Se ficar comprovado que apenas um dos quatro envolvidos no ilícito penal é culpado, então a proposição simbolizada por $(\sim P) \rightarrow (\sim Q) \vee R$ será verdadeira.

54. Independentemente de quem seja culpado, a proposição $\{P \rightarrow (\sim Q)\} \rightarrow \{Q \vee [(\sim Q) \vee R]\}$ será sempre verdadeira, isto é, será uma tautologia.

55. As proposições $P \wedge (\sim Q) \rightarrow (\sim R)$ e $R \rightarrow [Q \wedge (\sim P)]$são equivalentes.

56. Se as três proposições P, Q e R forem falsas, então pelo menos duas das pessoas envolvidas no ilícito penal serão culpadas.

Resolução

51. As proposições P, Q e R são proposições simples.

Esse item foi anulado. Escrevi um artigo no blog do Estratégia sobre essa anulação.

https://www.estrategiaconcursos.com.br/blog/cespe-anula-questao-polemica-de-raciocinio-logico-no-concurso-da-pf/

52. A proposição “Se Paulo é mentiroso, então Maria é culpada” pode ser representada simbolicamente por $(\sim \boldsymbol{Q}) \leftrightarrow (\sim \boldsymbol{R})$.

O símbolo utilizado corresponde ao conectivo “se e somente se”.

O item 52 está errado.

53. Se ficar comprovado que apenas um dos quatro envolvidos no ilícito penal é culpado, então a proposição simbolizada por $(\sim\boldsymbol{P}) \rightarrow (\sim\boldsymbol{Q}) \vee \boldsymbol{R}$ será verdadeira.

Resolução

É importante lembrar que "Se A, então B" equivale a "Se $\sim B$, então $\sim A$".

Leia novamente o item 53. O próprio item 53 é uma proposição composta pelo "se..., então...".

Utilizando a equivalência acima, o item 53 equivale a dizer que "Se a proposição simbolizada por $(\sim P) \rightarrow (\sim Q) \vee R$ é falsa, então fica comprovado que não apenas um dos quatro envolvidos no ilícito penal é culpado".

Para que a proposição condicional (composta pelo "se..., então...") seja falsa, devemos ter antecedente verdadeiro e consequente falso.

$$\underbrace{(\sim P)}_{V} \rightarrow \underbrace{(\sim Q) \vee R}_{F}$$

Observe que o consequente $(\sim Q) \vee R$ é uma proposição composta pelo "ou". Uma composta pelo "ou" é falsa apenas quando seus dois componentes são falsos.

$$\underbrace{(\sim P)}_{V} \rightarrow \underbrace{(\sim Q)}_{F} \vee \underbrace{R}_{F}$$

Resumindo: $(\sim P)$ é verdade, $(\sim Q)$ é falsa e R é falsa. Podemos então dizer que R é falsa, Q é verdade e R é falsa.

P: "João e Carlos não são culpados". (F)

Q: "Paulo não é mentiroso". (V)

R: "Maria é inocente". (F)

Sendo P falsa, temos que João é culpado ou Carlos é culpado (temos pelo menos 1 culpado entre João e Carlos).

Sendo R falsa, temos que Maria é culpada.

Desta forma, temos pelo menos 2 culpados (Maria e pelo menos um entre João e Carlos).

Vimos que o enunciado equivale a dizer que "Se a proposição simbolizada por $(\sim P) \rightarrow (\sim Q) \vee R$ é falsa, então fica comprovado que não apenas um dos quatro envolvidos no ilícito penal é culpado".

Portanto, o item 53 está certo.

54. Independentemente de quem seja culpado, a proposição $\{\boldsymbol{P} \rightarrow (\sim \boldsymbol{Q})\} \rightarrow \{\boldsymbol{Q} \vee [(\sim \boldsymbol{Q}) \vee \boldsymbol{R}]\}$ será sempre verdadeira, isto é, será uma tautologia.

Resolução

Uma possível resolução é através da tabela-verdade. Entretanto, como há 3 proposições simples envolvidas, a tabela-verdade teria $2^3 = 8$ linhas e seria bastante trabalhosa.

Vamos utilizar outro método mais interessante, nesse caso, para verificar se tal proposição é uma tautologia.

Uma tautologia é uma proposição que é sempre verdadeira independentemente dos valores atribuídos às proposições simples. Assim, para verificar se uma proposição é tautológica, podemos tentar forçar uma condição para que ela seja falsa. Se isso não for possível, a proposição será uma tautologia.

Vamos tentar fazer com que a proposição $\{P \rightarrow (\sim Q)\} \rightarrow \{Q \vee [(\sim Q) \vee R]\}$ seja falsa.

Para que a proposição condicional acima seja falsa, devemos forçar a aparição do famoso VF (antecedente V e consequente F).

$$\underbrace{\{P \rightarrow (\sim Q)\}}_{V} \rightarrow \underbrace{\{Q \vee [(\sim Q) \vee R]\}}_{F}$$

Observe que o consequente $\{Q \vee [(\sim Q) \vee R]\}$ é uma proposição composta pelo "ou". Uma composta pelo "ou" é falsa apenas quando todos os seus componentes são falsos.

$$\left\{\underbrace{Q}_{F} \vee \left[\underbrace{(\sim Q)}_{F} \vee \underbrace{R}_{F}\right]\right\}$$

Ora, chegamos em um absurdo pois temos Q e $\sim Q$ falsos simultaneamente.

Desta forma, é impossível fazer com que a proposição dada no enunciado seja falsa. Trata-se, portanto, de uma tautologia.

O item 54 está certo.

55. As proposições $\boldsymbol{P \wedge (\sim Q) \rightarrow (\sim R)}$ e $\boldsymbol{R \rightarrow [Q \wedge (\sim P)]}$ são equivalentes.

Lembre-se que "Se A, então B" equivale a "Se ~B, então ~A". Em outras palavras: para transformar uma condicional em outra condicional, devemos inverter a ordem e negar os dois componentes.

A falha do item ocorreu na tentativa frustrada de negar a proposição $P \wedge (\sim Q)$. Os dois componentes foram negados, mas o conectivo não foi trocado para "ou" (lei de DeMorgan).

O item 55 está errado.

56. Se as três proposições P, Q e R forem falsas, então pelo menos duas das pessoas envolvidas no ilícito penal serão culpadas.

Resolução

Sendo P, Q e R falsas, podemos concluir que:

i) João é culpado ou Carlos é culpado (temos pelo menos 1 culpado entre João e Carlos).

ii) Paulo é mentiroso.

iii) Maria não é inocente (temos mais 1 culpada).

Portanto, pelo menos duas pessoas envolvidas são culpadas.

O item 56 está certo.

Gabarito: 51-Anulada, 52-Errado, 53-Certo, 54-Certo, 55-Errado, 56-Certo

Em um aeroporto, 30 passageiros que desembarcaram de determinado voo e que estiveram nos países A, B ou C, nos quais ocorre uma epidemia infecciosa, foram selecionados para ser examinados. Constatou-se que exatamente 25 dos passageiros selecionados estiveram em A ou em B, nenhum desses 25 passageiros esteve em C e 6 desses 25 passageiros estiveram em A e em B.

Com referência a essa situação hipotética, julgue os itens que se seguem.

57. Se 11 passageiros estiveram em B, então mais de 15 estiveram em A.

58. Se 2 dos 30 passageiros, selecionados forem escolhidos ao acaso, então a probabilidade de esses 2 passageiros terem estado em 2 desses países é inferior a 1/30.

59. A quantidade de maneiras distintas de se escolher 2 dos 30 passageiros selecionados de modo que pelo menos um deles tenha estado em C é superior a 100.

60. Considere que, separando-se o grupo de passageiros selecionados que visitou o país A, o grupo que visitou o país B e o grupo que visitou o país C, seja verificado, em cada um desses grupos, que pelo menos a metade dos seus componentes era do sexo masculino. Nessa situação, conclui-se que o grupo de 30 passageiros selecionados tem, no máximo, 14 mulheres.

Resolução

57. Se 11 passageiros estiveram em B, então mais de 15 estiveram em A.

Vamos utilizar o princípio da inclusão-exclusão (fórmula da união).

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$25 = n(A) + 11 - 6$$

$$n(A) = 20$$

O item 57 está certo.

58. Se 2 dos 30 passageiros, selecionados forem escolhidos ao acaso, então a probabilidade de esses 2 passageiros terem estado em 2 desses países é inferior a 1/30.

Vamos escolher 2 dos 30 passageiros. Isso pode ser feito de:

$$C_{30}^{2}=\frac{30\times 29}{2\times 1}=435\ maneiras$$

Há 6 passageiros que estiveram em 2 desses países. Assim, a quantidade de maneiras possíveis para escolher 2 passageiros que já estiveram em 2 países é

$$C_{6}^{2}=\frac{6\times 5}{2\times 1}=15$$

A probabilidade pedida é

$$\frac{15}{435}=\frac{1}{29}$$

Esse número é maior do que 1/30 (quando aumentamos o denominador, diminuímos o valor da fração).

O item 58 está errado.

59. A quantidade de maneiras distintas de se escolher 2 dos 30 passageiros selecionados de modo que pelo menos um deles tenha estado em C é superior a 100.

São 30 passageiros dos quais 25 não estiveram em C. Portanto, 30 – 25 = 5 estiveram em C.

A quantidade total de maneiras para selecionar 2 passageiros dentre os 30 é igual a $C_{30}^{2}=435$.

A quantidade de maneiras de escolher 2 passageiros que não estiveram em C é

$$C_{25}^{2}=\frac{25\times 24}{2\times 1}=300$$

Assim, a quantidade de maneiras distintas de se escolher 2 pessoas dentre 30 de modo que pelo menos um tenha estado em C é $435-300=135$.

O item 59 está certo.

60. Considere que, separando-se o grupo de passageiros selecionados que visitou o país A, o grupo que visitou o país B e o grupo que visitou o país C, seja verificado, em cada um desses

grupos, que pelo menos a metade dos seus componentes era do sexo masculino. Nessa situação, conclui-se que o grupo de 30 passageiros selecionados tem, no máximo, 14 mulheres.

Resolução

Vamos mostrar que o item está errado através de um contraexemplo.

O conjunto C tem 5 elementos. Desta forma, vamos colocar 3 homens e **2 mulheres**.

Considere que as 6 pessoas que integram a interseção dos conjuntos A e B são homens.

Se considerarmos que o conjunto A tem 10 pessoas, como já temos 6 homens, precisaremos de **4 mulheres** (as 4 mulheres pertencem apenas ao conjunto A). Este valor de 10 pessoas é um valor arbitrário, apenas para mostrar que existe pelo menos um caso em que a proposição é falsa.

Ora, sabemos que $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

Assim,

$$25 = 10 + n(B) - 6$$

$$n(B) = 21$$

Como pelo menos metade é formada por homens, teremos 11 homens (6 na interseção entre A e B e 5 que pertencem apenas ao conjunto B) e **10 mulheres** que pertencem apenas ao conjunto B.

Desta forma, neste contraexemplo, temos um total de 2 + 4 + 10 = 16 mulheres.

O item está errado.

Gabarito: 57-Certo, 58-Errado, 59-Certo, 60-Errado