Olá, queridos alunos!!

Tudo bem?

Aqui quem vos fala é o professor Guilherme Neves.

Vamos fazer uma super-revisão de Matemática para o concurso da PRF.

Para **tirar dúvidas** e ter **acesso a dicas e conteúdos gratuitos**, acesse minhas redes sociais:
Instagram - @profguilhermeneves
https://www.instagram.com/profguilhermeneves

Canal do YouTube – Prof. Guilherme Neves
https://youtu.be/gqab047D9l4

E-mail: profguilhermeneves@gmail.com

Sem mais delongas, vamos começar!!

1. Porcentagem

As razões de denominador 100 são chamadas taxas percentuais, razões centesimais, percentagem ou porcentagem.

$$\frac{p}{100} = p\%$$

Podemos expressar as porcentagens sob a forma decimal (taxa unitária). Para obter a taxa unitária, basta dividir o numerador por 100.

$$80\% = \frac{80}{100} = 0{,}8$$

$$47\% = \frac{47}{100} = 0{,}47$$

- Para calcular x% de um valor, basta multiplicar o valor pelo número x/100.

Exemplo: Calcular 30% de 500.

Resolução

$$30\% \; de \; 500 = \frac{30}{100} \cdot 500 = 150$$

- Para transformar uma fração ordinária ou um número qualquer em taxa percentual, basta multiplicá-la por 100%.

Exemplo: Transformar a fração 3/8 em taxa percentual.

Resolução

$$\frac{3}{8} = \frac{3}{8} \cdot 100\% = \frac{300}{8}\% = 37{,}5\%$$

- É comum querermos saber qual é a participação percentual de uma parte do todo. Por exemplo, imagine que em um grupo de 300 pessoas, 120 são homens. Como calculamos a participação percentual dos homens? Ora, basta dividir a "parte" pelo "todo". E para transformar o resultado em porcentagem, devemos multiplicar o resultado por 100%.

$$\frac{120}{300} \cdot 100\% = 40\%$$

Isto significa que 40% das 300 pessoas são homens.

- Outro importante tópico em porcentagem é o cálculo da variação percentual. Por exemplo, um produto custava R$ 1.200,00 e passou a custar R$ 1.500,00. Qual foi a variação percentual?

Sejam $V_{inicial} = 1.200{,}00$ e $V_{final} = 1.500{,}00$.

Para calcular a variação percentual, basta utilizar a seguinte fórmula:

$$i = \frac{V_{final} - V_{inicial}}{V_{inicial}} \cdot 100\% = \frac{1.500 - 1.200}{1.200} = \frac{300}{1.200} \cdot 100\% = 25\%$$

Esta mesma fórmula pode ser usada para calcular a variação percentual em casos de desconto.

- Finalmente, é crucial saber calcular variações percentuais sucessivas.

Se um valor aumenta $i = p\%$, devemos multiplicar por $(1 + i)$.

Se um valor diminui $i = p\%$, devemos multiplicar por $(1 - i)$.

Assim, se uma mercadoria custa 200 reais e sofre um aumento de 30% e um desconto de 20%, ela passa a custar

$$200 \cdot (1 + 0{,}3) \cdot (1 - 0{,}2) = 200 \cdot 1{,}3 \cdot 0{,}8 = 208$$

2. Regra de Três

- Coloque no cabeçalho da tabela as grandezas.
- Na primeira linha, coloque os valores das grandezas na situação em que todas são conhecidas.
- Na segunda linha, coloque os valores das grandezas na situação em que uma das grandezas é desconhecida.
- Coloque uma seta para baixo na coluna da grandeza desconhecida (onde tem o "x").
- Compare as grandezas conhecidas com a grandeza desconhecida.
- Se as duas grandezas aumentam ou se as duas diminuem, as grandezas são diretamente proporcionais e a seta fica voltada para baixo.
- Se uma grandeza aumenta enquanto a outra diminui, as grandezas são inversamente proporcionais e a seta fica voltada para cima.
- Montar a proporção e resolver a equação.
- Marcar o gabarito e correr pro abraço.

Exemplo

Um grupo de 8 funcionários analisou 32 propostas de reestruturação de um determinado setor de uma empresa em 16 horas de trabalho. Para analisar 48 dessas propostas, em 12 horas de trabalho, um outro grupo de funcionários, em igualdade de condições do grupo anterior, deverá ser composto por um número de pessoas igual a

(A) 18. (B) 12. (C) 16. (D) 14. (E) 20

Resolução

Vamos montar uma tabela para comparar as grandezas.

Funcionários	Propostas	Horas de trabalho
8 ↓	32 ↓	16 ↑
x	48	12

Como a quantidade de propostas aumentou, aumentará também a quantidade de funcionários. As grandezas são diretamente proporcionais (seta voltada para baixo)

Como o tempo diminuiu, vamos precisar de mais funcionários. Como uma grandeza diminui enquanto a outra aumenta, elas são inversamente proporcionais (seta voltada para cima)

$$\frac{8}{x} = \frac{32}{48} \cdot \frac{12}{16}$$

A fração 32/48 pode ser simplificada por 16 e a fração 12/16 pode ser simplificada por 4.

$$\frac{8}{x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$$

Podemos cortar 3 com 3. Finalmente 2/4 = 1/2. Assim,

$$\frac{8}{x} = \frac{1}{2}$$

$$x = 2 \cdot 8 = 16$$

Gabarito: C

---

3. Razão e Proporção

Neste tópico, é fundamental saber resolver questões que envolvam divisão proporcional. Vejamos através de um exemplo como funciona este assunto.

> Uma gratificação de R$ 5.280,00 será dividida entre três funcionários de uma empresa na razão direta do número de filhos e na razão inversa das idades de cada um. André tem 30 anos e possui 2 filhos; Bruno com 36 anos tem 3 filhos e Carlos tem 48 anos e 6 filhos. Quanto receberá cada filho?

Vamos dividir R$ 5.280 em três partes. Sejam $a, b\ e\ c$ essas três partes. A soma dessas três partes é R$ 5.280,00. Portanto:

$$a + b + c = 5.280$$

O objetivo é calcular cada uma das partes $a, b\ e\ c$. É agora que entra a tal "constante de proporcionalidade".

$$constante\ de\ proporcionalidade = k$$

Cada parte será igual a um número multiplicado pela constante k.

O enunciado afirma que cada parte será diretamente proporcional ao número de filhos e inversamente proporcional às idades de cada um.

Lembre-se sempre:

- Diretamente proporcional → multiplica a constante k
- Inversamente proporcional → divide a constante k

No nosso exemplo, o número de filhos multiplicará a constante (porque é diretamente proporcional) e a idade dividirá a constante (porque é inversamente proporcional).

André, por exemplo, tem 2 filhos e possui 30 anos de idade. Portanto,

$$a = \frac{2k}{30} = \frac{k}{15}$$

Bruno tem 3 filhos e 36 anos. Portanto,

$$b = \frac{3k}{36} = \frac{k}{12}$$

Carlos tem 6 filhos e 48 anos. Portanto,

$$c = \frac{6k}{48} = \frac{k}{8}$$

A soma das três partes é 5.280. Logo,

$$a + b + c = 5.280$$

$$\frac{k}{15} + \frac{k}{12} + \frac{k}{8} = 5.280$$

$$\frac{8k + 10k + 15k}{120} = 5.280 \Leftrightarrow \frac{33k}{120} = 5.280$$

$$33k = 5.280 \cdot 120 \Leftrightarrow k = 19.200$$

Assim, podemos calcular as três partes:

$$a = \frac{k}{15} = \frac{19.200}{15} = 1.280$$

$$b = \frac{k}{12} = \frac{19.200}{12} = 1.600$$

$$c = \frac{k}{8} = \frac{19.200}{8} = 2.400$$

4. Equações e Sistemas do Primeiro Grau

Para resolver equações do primeiro grau, basta isolar a incógnita. Para tanto, vamos aprender alguns procedimentos básicos para construir equações equivalentes à equação dada de tal forma que no final a incógnita fique isolada.

i) Ao somar ou subtrair um mesmo número real k em ambos os lados de uma equação, obtém-se uma equação equivalente.

Tome por exemplo a equação 2x + 3 = 7. Podemos adicionar o número -3 aos dois membros da equação.

$$2x + 3 = 7$$

$$2x + 3 - 3 = 7 - 3$$

$$2x = 4$$

Ao adquirir prática, você efetuará este procedimento automaticamente jogando números de um lado para o outro da equação simplesmente trocando o seu sinal. Em suma, quando um número positivo estiver em um lado da equação, você pode transportá-lo para o outro lado da equação trocando o seu sinal. Entretanto, o que estamos fazendo na verdade é adicionando o oposto do número aos dois lados da equação.

Veja outro exemplo:

$$3x - 5 = 10$$

$$3x - 5 + 5 = 10 + 5$$

$$3x = 15$$

Ou você pode simplesmente fazer:

$$3x - 5 = 10$$

$$3x = 10 + 5$$

$$3x = 15$$

i) Ao multiplicar ou dividir um mesmo número real k em ambos os lados de uma equação, obtém-se uma equação equivalente. No caso da divisão, o número k não pode ser igual a zero.

Tome por exemplo a equação 2x =4. Podemos dividir os dois membros da equação por 2.

$$2x = 4$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$$

$$x = 2$$

Ao adquirir prática, você efetuará este procedimento automaticamente jogando números de um lado para o outro da equação. Se um número não-nulo está multiplicando um membro inteiro de uma equação, você pode transportá-lo dividindo todo o outro membro. Se um número está dividindo um membro inteiro de uma equação, você pode transportá-lo multiplicando o outro membro.

Veja outro exemplo:

$$\frac{x}{3} = 9$$

$$\frac{x}{3} \cdot 3 = 9 \cdot 3$$

$$x = 27$$

Ou você pode simplesmente fazer:

$$\frac{x}{3} = 9$$

$$x = 9 \cdot 3$$

$$x = 27$$

INDO MAIS
FUNDO!

<u>Dica</u>: Quando uma equação possuir frações, multiplique os dois membros da equação pelo MMC dos denominadores. Veja o seguinte exemplo:

$$\frac{2x}{3} + 3(x-2) + \frac{5}{6} = 4x - \frac{1}{2} - 2(x-1)$$

O MMC dos denominadores é MMC(3,6,2) = 6. Vamos primeiro eliminar os parênteses e, em seguida, multiplicar os dois membros da equação por 6.

$$\frac{2x}{3} + 3x - 6 + \frac{5}{6} = 4x - \frac{1}{2} - 2x + 2$$

$$6 \cdot \frac{2x}{3} + 6 \cdot 3x - 6 \cdot 6 + 6 \cdot \frac{5}{6} = 6 \cdot 4x - 6 \cdot \frac{1}{2} - 6 \cdot 2x + 6 \cdot 2$$

Obviamente você não precisa escrever isso. Você pode já ir multiplicando automaticamente em sua cabeça.

Para multiplicar a fração, primeiro divida o MMC pelo denominador e multiplique o resultado pelo numerador (divida pelo número que está embaixo e multiplique o resultado pelo número que está em cima).

Por exemplo, na primeira fração: Divida 6 por 3 – o resultado é 2. Depois multiplique 2 por 2 e obtenha 4.

$$4x + 18x - 36 + 5 = 24x - 3 - 12x + 12$$

Vamos agora agrupar os membros semelhantes em cada lado da equação.

$$22x - 31 = 12x + 9$$

Vamos passar os termos que contém "x" para o primeiro membro e os números para o segundo membro. Lembre-se de inverter os sinais.

$$22x - 12x = 31 + 9$$

$$10x = 40$$

$$x = \frac{40}{10} = 4$$

Assim, o conjunto verdade da equação dada é V = {4}.

- Problemas do primeiro grau são problemas que podem ser resolvidos com uma equação ou um sistema do primeiro grau.

(CESPE 2017/PM-AL)

Os soldados Pedro e José, na função de armeiros, são responsáveis pela manutenção de determinada quantidade de armas da corporação — limpeza, lubrificação e municiamento. Se Pedro fizer a manutenção das armas que estavam a seu encargo e de mais 50 que estavam a cargo de José, então Pedro fará a manutenção do dobro de armas que sobraram para José. Se José fizer a manutenção das armas que estavam a seu encargo e de mais 60 que estavam a cargo de Pedro, José fará a manutenção do triplo de armas que sobraram para Pedro. Nesse caso, a quantidade de armas para manutenção a cargo de Pedro e José é superior a 260.

Resolução

Vamos considerar que as quantidades de armas de Pedro e José são, respectivamente, p e j.

Na primeira situação, Pedro vai fazer a manutenção das suas p armas e de mais 50 armas de José.

Portanto, Pedro terá p + 50 armas e José terá j – 50 armas.

O enunciado afirma que, neste caso, Pedro fará a manutenção do dobro de armas que sobraram para José.

$$Pedro = 2 \times José$$

$$p + 50 = 2 \cdot (j - 50)$$

$$p + 50 = 2j - 100$$

$$\boxed{p = 2j - 150}$$

Na segunda situação, José ficará com as suas j armas e mais 60 que estavam sob responsabilidade de Pedro.

Portanto, José ficará com j + 60 armas e Pedro ficará com p – 60 armas. Neste caso, José terá o triplo de armas de Pedro.

$$José = 3 \times Pedro$$

$$j + 60 = 3 \cdot (p - 60)$$

Sabemos que $p = 2j - 150$. Portanto,

$$j + 60 = 3 \cdot (2j - 150 - 60)$$

$$j + 60 = 3 \cdot (2j - 210)$$

$$j + 60 = 6j - 630$$

$$60 + 630 = 6j - j$$

$$5j = 690$$

$$j = \frac{690}{5} = 138$$

Assim, a quantidade de armas de Pedro é:

$$p = 2j - 150$$

$$p = 2 \cdot 138 - 150 = 126$$

O total de armas de Pedro e José é

$$p + j = 126 + 138 = 264$$

Gabarito: Certo

5. Função Polinomial do 1º Grau

Na parte de função afim (função polinomial do primeiro grau), acho importante saber como determinar a equação da reta.

Com isto, a partir de certos dados que variam linearmente, podemos determinar a equação da reta e determinar valores futuros.

Quando são dados dois pontos (x_1,y_1) e (x_2,y_2), a taxa de variação pode ser calculada como o quociente entre a variação de y e a variação de x.

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Exemplo: Determine a lei de formação da função afim que passa pelos pontos $(2{,}5)$ e $(-1, -4)$.

Resolução

Já que o gráfico passa pelos pontos $(2{,}5)$ e $(-1, -4)$, então o coeficiente "a" é dado por

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4-5}{-1-2} = \frac{-9}{-3} = +3$$

Lembre-se que a lei de formação da função afim é do tipo $y = ax + b$.

Tendo calculado o coeficiente "a", a lei de formação da função afim torna-se $y = 3x + b$. Podemos agora utilizar qualquer um dos pontos para calcular o coeficiente "b".

O coeficiente "b" é denominado coeficiente linear ou termo independente. Ele é o intercepto do gráfico com o eixo y.

Utilizemos por exemplo o ponto $(2{,}5)$. Este ponto nos informa que quando x = 2, y = 5. Já que a lei de formação é $y = 3x + b$, devemos substituir esses valores na lei.

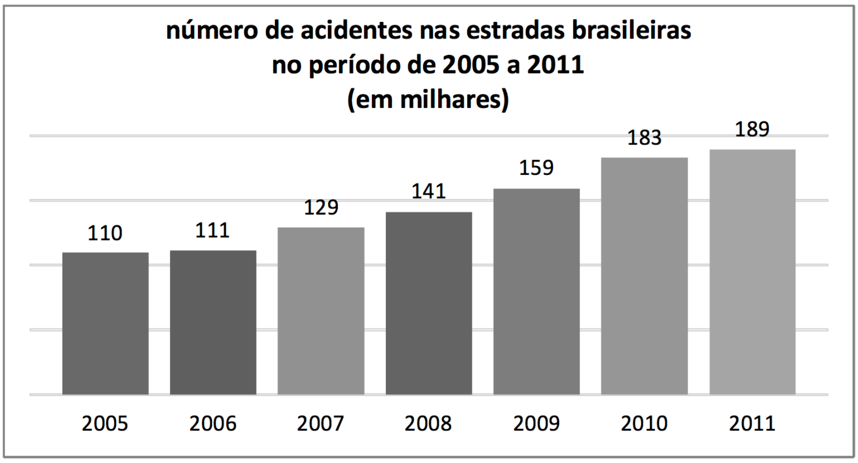
$$3 \cdot 2 + b = 5$$

$$6 + b = 5$$

$$b = -1$$

Assim, a lei de formação da função é $y = 3x - 1$.

(CESPE 2013/PRF)



Considere que, em 2009, tenha sido construído um modelo linear para a previsão de valores futuros do número de acidentes ocorridos nas estradas brasileiras. Nesse sentido, suponha que o número de acidentes no ano t seja representado pela função F(t) = At + B, tal que F(2007) = 129.000 e F(2009) =159.000. Com base nessas informações e no gráfico apresentado, julgue os itens a seguir.

1. **O valor da constante A em F(t) é superior a 14.500.**

2. **A diferença entre a previsão para o número de acidentes em 2011 feita pelo referido modelo linear e o número de acidentes ocorridos em 2011 dado no gráfico é superior a 8.000.**

Resolução

Vamos calcular a taxa de variação A. A taxa de variação é o quociente entre a variação de y pela variação de x.

$$A = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{159.000 - 129.000}{2009 - 2007} = \frac{30.000}{2} = 15.000$$

Portanto, o item I está certo.

Isto significa que a cada ano o número de acidentes aumentará em 15.000. Assim, de 2009 a 2011 o número de acidentes aumentará 2 x 15.000 = 30.000.

Como em 2009 foram 159.000 acidentes, então haverá 159.000 + 30.000 = 189.000 acidentes em 2011. Este é justamente o número de acidentes ocorridos em 2011 de acordo com o gráfico.

Assim, a diferença entre a previsão e o número de acidentes ocorridos é igual a zero.

O item II está errado.

Gabarito: Certo, Errado

6. Função Quadrática

Na parte sobre Função Quadrática (Função Polinomial do 2º Grau), é importantíssimo saber como calcular o ponto de máximo ou ponto de mínimo da função.

O ponto de interseção da parábola com o seu eixo de simetria é chamado vértice da parábola.

Quando a > 0, o vértice é um ponto de mínimo.

Quando a < 0, o vértice é um ponto de máximo.

As coordenadas do vértice são dadas por:

$$\boxed{\begin{aligned} x_v &= \frac{-b}{2a} \\ y_v &= \frac{-\Delta}{4a} \end{aligned}}$$

Também é possível calcular a coordenada x_v pela média aritmética das raízes da função.

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

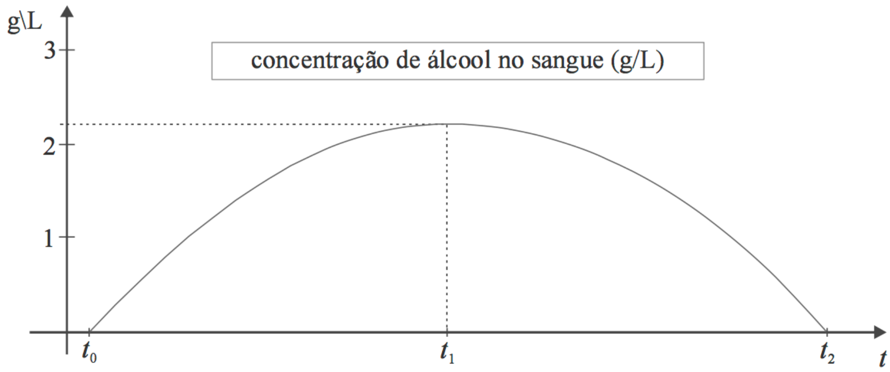
Para calcular a coordenada y_v, basta substituir x_v na expressão $y = ax^2 + bx + c$.

Para calcular as raízes da função, devemos utilizar a seguinte fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

HORA DE PRATICAR!

(CESPE 2013/PRF)



Considere que o nível de concentração de álcool na corrente sanguínea, em g/L, de uma pessoa, em função do tempo t, em horas, seja expresso por $N = -0{,}008(t^2 - 35t + 34)$. Considere, ainda, que essa pessoa tenha começado a ingerir bebida alcoólica a partir de $t = t_0$ ($N(t_0) = 0$). Considere, por fim, a figura acima, que apresenta o gráfico da função N(t) para $t \in [t_0, t_2]$. Com base nessas informações e tomando 24,3 como valor aproximado de $\sqrt{589}$, julgue os itens que se seguem.

1. **O nível de concentração mais alto de álcool na corrente sanguínea da referida pessoa ocorreu em $t = t_1$ com $t_1 > 18$ horas.**

2. **O nível de concentração de álcool na corrente sanguínea da pessoa em questão foi superior a 1 g/L por pelo menos 23 horas.**

3. **O valor de t_2 é inferior a 36.**

Resolução

<u>Item 1</u>

A função é dada por:

$$N = -0{,}008(t^2 - 35t + 34)$$

$$N = -0{,}008t^2 + 0{,}28t - 0{,}272$$

Esta é uma função quadrática em que a = - 0,008, b = 0,28 e c = - 0,272.

Para calcular o tempo em que a concentração de álcool foi máxima, devemos calcular a abscissa do vértice da parábola, que é dada pela seguinte fórmula:

$$t_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-0{,}28}{2 \cdot (-0{,}008)} = 17{,}5\ horas$$

O item está errado, pois 17,5 < 18.

<u>Item 2</u>

O nível de concentração de álcool na corrente sanguínea da pessoa em questão foi superior a 1 g/L por pelo menos 23 horas.

Resolução

A função é dada por:

$$N = -0{,}008(t^2 - 35t + 34)$$

$$N = -0{,}008t^2 + 0{,}28t - 0{,}272$$

Vamos verificar para quais valores de t a concentração é igual a 1.

$$-0{,}008t^2 + 0{,}28t - 0{,}272 = 1$$

$$-0{,}008t^2 + 0{,}28t - 1{,}272 = 0$$

Vamos multiplicar esta equação por (-1).

$$0{,}008t^2 - 0{,}28t + 1{,}272 = 0$$

Vamos agora multiplicar esta equação por 1.000, para eliminar as casas decimais.

$$8t^2 - 280t + 1272 = 0$$

Vamos agora dividir toda a equação por 8 para simplificar os valores.

$$t^2 - 35t + 159 = 0$$

Temos agora uma equação do segundo grau em que a = 1, b = -35 e c = 159.

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{35 \pm \sqrt{(-35)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 159}}{2 \cdot 1} = \frac{35 \pm \sqrt{589}}{2}$$

A questão pede para considerar $\sqrt{589}$ igual a 24,3.

$$t = \frac{35 \pm \sqrt{589}}{2} = \frac{35 \pm 24{,}3}{2}$$

$$t = 5{,}35 \ ou \ t = 29{,}65$$

O que isto significa? Que t = 5,35 horas foi o primeiro instante em que o indivíduo teve o nível de concentração de álcool igual a 1 g/L. O nível de álcool foi aumentando atingindo seu valor máximo em t = 17,5 horas (questão anterior). Depois o nível alcoólico foi baixando até que em t = 29,65 o nível atingiu 1 g/L novamente. Assim, o tempo em que o nível alcoólico foi superior a 1 g/L é igual a 29,65 – 5,35 = 24,3 horas. O item está certo.

Item 3

O valor de t_2 é inferior a 36.

Resolução

Pelo gráfico, t_2 é o segundo instante em que o nível de álcool no sangue foi igual a zero. Basta igualar a função a zero para descobrir este valor.

$$-0{,}008(t^2 - 35t + 34) = 0$$

O número – 0,008 que está multiplicando o primeiro membro, passa dividindo o segundo membro.

$$t^2 - 35t + 34 = \frac{0}{-0{,}008}$$

$$t^2 - 35t + 34 = 0$$

Temos uma equação do segundo grau em que a = 1, b = -35 e c = 34.

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{35 + \sqrt{(-35)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 34}}{2 \cdot 1} = \frac{35 \pm \sqrt{1.089}}{2}$$

$$t = \frac{35 \pm 33}{2}$$

$$t = 1 \; ou \; t = 34$$

Assim, $t_1 = 1$ e $t_2 = 34$. O item está certo.

Gabarito: errado; certo; certo

7. LOGARITMOS

Às vezes é necessário o uso de logaritmos para resolver algumas equações exponenciais.

Para entender o conceito de logaritmos, basta aprender que logaritmo é um sinônimo de expoente.

TOME NOTA!

Pensou em logaritmos, pensou em expoente.

Assim, qual o significado da expressão $\mathbf{\log_3 9?}$

Devemos raciocinar da seguinte forma:

Qual o expoente que se deve dar à base 3 para que o resultado seja 9? Ou ainda: 3 elevado a que número é igual a 9? A resposta é 2.

Portanto, $\log_3 9 = 2$.

São equivalentes, portanto, as duas expressões:

$$\mathbf{\log_3 9 = 2 \Leftrightarrow 3^2 = 9}$$

Em outras palavras, tanto faz escrever $3^2 = 9$ como escrever $\log_3 9 = 2$.

Vejamos outro exemplo. Calcular o valor de $\log_5 125$.

Devemos raciocinar da seguinte forma: 5 elevado a que número é igual a 125? A resposta é 3.

Portanto, $\log_5 125 = 3$.

$$\log_5 125 = 3 \Leftrightarrow 5^3 = 125$$

E é importante saber a seguinte relação:

$$\boxed{\log_b a = x \quad \Leftrightarrow \quad b^x = a}$$

Vejamos mais alguns exemplos para fixar o conceito.

Exemplo: Calcular $\log_4 16$. A pergunta que deve ser feita é: 4 elevado a quanto é igual a 16? A resposta é 2. Portanto, $\log_4 16 = 2$.

Exemplo: Calcular $\log_6 6$. A pergunta que deve ser feita é: 6 elevado a quanto é igual a 6? A resposta é 1. Portanto, $\log_6 6 = 1$.

Exemplo: Calcular $\log_4 1$. A pergunta que deve ser feita é: 4 elevado a quanto é igual a 1? A resposta é 0. Portanto, $\log_4 1 = 0$.

Exemplo: Calcular $\log_5 1/25$. A pergunta que deve ser feita é: 5 elevado a quanto é igual a 1/25? A resposta é -2. Portanto, $\log_5 1/25 = -2$.

Existem dois sistemas de logaritmos que por serem muito importantes recebem uma notação especial:

i) Sistema de logaritmos decimais

É o sistema de **base 10**.

Utilizaremos a seguinte notação:

$$\mathbf{\log_{10} x = \log x}$$

Assim, **se a base não estiver explícita**, já sabemos que se trata de um **logaritmo de base 10**.

Exemplo:

$$\log 2 = \log_{10} 2$$

ii) Sistema de logaritmos neperianos ou naturais.

É o sistema de base $\boldsymbol{e = 2,71828182\ldots}$

Adotaremos a seguinte notação:

$$\boldsymbol{\log_e x = lnx}$$

Observe que, por exemplo:

$$\ln 4 = \log_e 4$$

Se um problema informa, por exemplo, que $\ln 2 = 0{,}693$, você pode concluir que $e^{0{,}693} = 2$.

Vamos relembrar as principais propriedades operatórias dos logaritmos.

i) Se x e y são dois números reais positivos e iguais ($x = y$), então $\log_a x = \log_a y$.

Em outras palavras, se dois números positivos são iguais, então seus logaritmos (em qualquer base) também serão iguais. Isso é por demais óbvio.

ii) $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$

A segunda propriedade diz que se o logaritmando possui um expoente, então o expoente pode sair da logaritmando e passar a multiplicar o logaritmo.

Por exemplo, $\log 8 = \log 2^3 = 3 \cdot \log 2$.

iii) O **logaritmo do produto** de dois ou mais fatores reais e positivos **é igual a soma dos logaritmos dos fatores (em qualquer base)**.

$$\boldsymbol{\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y}$$

Exemplo:

Sabemos que:

$$\log_2 8 = 3, porque\ 2^3 = 8.$$

$$\log_2 16 = 4, porque\ 2^4 = 16.$$

Vamos calcular o logaritmo de $128 = 8 \times 16$ na base 2.

$$\log_2 128 = \log_2(8 \cdot 16) = \log_2 8 + \log_2 16 = 3 + 4 = 7$$

Portanto,

$$\log_2 128 = 7$$

O que é verdade, já que $2^7 = 128$.

iv) O **logaritmo do quociente** de dois números reais e positivos **é igual à diferença entre o logaritmo do dividendo e o logaritmo do divisor (em qualquer base)**.

$$\boldsymbol{\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y}$$

Exemplo:

Sabemos que:

$$\log_3 9 = 2, porque\ 3^2 = 9.$$
$$\log_3 243 = 5, porque\ 3^5 = 243.$$

Vamos calcular o logaritmo de $27 = 243/9$ na base 3.

$$\log_3 27 = \log_3\left(\frac{243}{9}\right) = \log_3 243 - \log_3 9 = 5 - 2 = 3$$

Portanto,

$$\log_3 27 = 3$$

O que é verdade, já que $3^3 = 27$.

v) Se o logaritmando e a base são iguais, então o logaritmo é igual a 1, ou seja,

$$\log_a a = 1$$

Exemplos:

$$\log_5 5 = 1$$

$$\log 10 = \log_{10} 10 = 1$$

$$\ln e = \log_e e = 1$$

(CESPE 2018/PM-AL)

Julgue o item subsequente, relativo à função $f(x) = 30 - \log_2(x)$.

O domínio da função $f(x)$ é o conjunto dos números reais positivos e $f(8) = 27$.

Resolução

Os logaritmos são apenas definidos para números reais positivos. Portanto, o domínio da função f é o conjunto dos números reais positivos.

$$f(8) = 30 - \log_2 8 = 30 - 3 = 27$$

Lembre-se que logaritmo é o mesmo que expoente. Assim, para calcular $\log_2 8$ basta se perguntar: qual o expoente de 2 para que o resultado seja 8? Em outras palavras, 2 elevado a quanto é igual a 8? Como $2^3 = 8$, então $\log_2 8 = 3$.

Gabarito: Certo

(CESPE 2018/BNB)

As únicas soluções da equação $(\boldsymbol{\log_3 x})^2 = \boldsymbol{\log_3 x + 6}$ são $\boldsymbol{x = 1/9}$ e $\boldsymbol{x = 27}$.

Resolução

Cuidado para não confundir $(\boldsymbol{\log_3 x})^2$ com $\boldsymbol{\log_3 x^2}$. Na primeira expressão, o logaritmo está elevado ao quadrado. Na segunda expressão, apenas $\boldsymbol{x}$ está elevado ao quadrado.

A propriedade do logaritmo da potência diz respeito à segunda expressão: $\boldsymbol{\log_3 x^2 = 2 \cdot \log_3 x}$.

Portanto, não podemos simplesmente pegar o expoente 2 e multiplicar o logaritmo na equação dada no problema. Ok?

Vamos lá. A equação dada pode ser transformada em uma equação algébrica do segundo grau. Para tanto, basta fazer $\log_3 x = m$.

$$\left(\underbrace{\log_3 x}_{m}\right)^2 = \underbrace{\log_3 x}_{m} + 6$$

A equação ficará:

$$m^2 = m + 6$$

$$m^2 - m - 6 = 0$$

Esta é uma equação do segundo grau em que $a = 1$, $b = -1$ e $c = -6$.

Vamos calcular o discriminante (Δ).

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25$$

Vamos agora calcular os valores de m.

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$m = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1}$$

$$m = \frac{1 \pm 5}{2}$$

Portanto,

$$m = \frac{1+5}{2} = 3 \quad ou\; m = \frac{1-5}{2} = -2$$

Queremos saber o valor de x e não o valor de m. Como $\log_3 x = m$, então:

$$\log_3 x = 3 \quad ou \; \log_3 x = -2$$

Agora é só aplicar a definição de logaritmo.

$$x = 3^3 = 27 \qquad ou \qquad x = 3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

Gabarito: Certo

8. Sequências e Progressões

Recentemente o CESPE tem cobrado diversas sequências numéricas com as mais diversas leis de formação. É muito importante que você se acostume com a notação a_i.

Nessa notação, a_1 representa o primeiro termo, a_2 o segundo termo, e assim por diante.

Uma sequência é uma lista de números escritos em uma ordem definida.

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots a_n, \dots)$$

O número a_1 é chamado de primeiro termo, a_2 é o segundo termo, e em geral a_n é o n-ésimo termo (termo de ordem n). Quando lidamos com sequências infinitas, cada termo a_n terá um sucessor a_{n+1}.

Há sequências que são formadas a partir dos elementos anteriores (Fórmula de Recorrência). Um exemplo clássico é a sequência de Fibonacci, que é definida pela seguinte fórmula de recorrência.

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \; para \; n \geq 3 \end{cases}$$

Essa fórmula indica que os dois primeiros termos são iguais a 1 e, a partir do terceiro, cada termo é igual à soma dos dois termos anteriores. Eis a sequência de Fibonacci:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

O CESPE adora a sequência de Fibonacci. Na sequência de Fibonacci, não necessariamente os dois termos iniciais serão iguais a 1. Observe esta recente questão cobrada pelo CESPE.

(CESPE 2018/SEDUC-AL)

Com relação a uma sequência numérica $a_1, a_2, \dots, a_n$, julgue os itens subsequentes.

Se a sequência for uma sequência de Fibonacci, em que $a_1 = 4$ e $a_2 = 9$, então $a_6 = 57$.

Resolução

Na sequência de Fibonacci, cada termo é a soma dos dois termos anteriores.

$$a_1 = 4$$

$$a_2 = 9$$

$$a_3 = a_2 + a_1 = 9 + 4 = 13$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 13 + 9 = 22$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 22 + 13 = 35$$

$$a_6 = a_5 + a_4 = 35 + 22 = 57$$

Gabarito: Certo

Em Progressão Aritmética, basicamente, você só precisa saber a fórmula do termo geral e a fórmula da soma dos termos de uma PA finita.

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \rightarrow \textit{Fórmula do Termo Geral}$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \rightarrow \textit{Fórmula da Soma dos Termos de uma PA finita}$$

Na verdade, existe uma forma mais geral ainda da Fórmula do Termo Geral. Você não precisa ficar preso ao primeiro termo:

$$\boxed{a_n = a_k + (n - k) \cdot r}$$

Exemplo: O vigésimo sétimo termo de uma progressão aritmética é igual a 93. Se a razão é igual a 4, qual o décimo termo?

$$a_{10} = a_{27} + (10 - 27) \cdot r$$

$$a_{10} = a_{27} - 17r$$

$$a_{10} = 93 - 17 \cdot 4 = 25$$

Em Progressão Geométrica, temos poucas fórmulas também: termo geral, soma dos termos de uma PG finita e soma dos termos de uma PG infinita.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \rightarrow Fórmula\ do\ Termo\ Geral$$

Analogamente, você não precisa ficar preso ao primeiro termo na fórmula do termo geral.

$$\boxed{a_n = a_k \cdot q^{n-k}}$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \rightarrow Fórmula\ da\ Soma\ dos\ Termos\ de\ uma\ PG\ finita$$

Quando o módulo da razão é menor que 1, normalmente reescrevemos a fórmula da soma da PG finita de uma forma mais conveniente:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \rightarrow Fórmula\ da\ Soma\ dos\ Termos\ de\ uma\ PG\ finita$$

Não se trata de uma nova fórmula. É exatamente a mesma fórmula descrita anteriormente apenas escrita de uma maneira diferente para facilitar os cálculos (quando o módulo da razão é menor que 1).

E, finalmente, a fórmula da soma dos infinitos termos de uma PG, que só é válida se o módulo da razão for menor que 1.

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

Vamos resolver alguns exemplos sobre PA e PG para revisar.

(CESPE 2017/PM-AL)

Manoel, candidato ao cargo de soldado combatente, considerado apto na avaliação médica das condições de saúde física e mental, foi convocado para o teste de aptidão física, em que uma das provas consiste em uma corrida de 2.000 metros em até 11 minutos. Como Manoel não é atleta profissional, ele planeja completar o percurso no tempo máximo exato, aumentando de uma quantidade constante, a cada minuto, a distância percorrida no minuto anterior. Nesse caso, se Manoel, seguindo seu plano, correr 125 metros no primeiro minuto e aumentar de 11 metros a distância percorrida em cada minuto anterior, ele completará o percurso no tempo regulamentar.

Resolução

No primeiro minuto, Manoel percorre 125 metros. Como a cada minuto a distância percorrida aumenta em 11 metros, então temos uma progressão aritmética em que o primeiro termo é 125 e a razão é 11.

$$a_1 = 125$$

$$r = 11$$

A distância total percorrida nos 11 minutos é a soma dos 11 termos da progressão aritmética.

Queremos que a soma dos 11 primeiros termos seja igual a 2.000 metros. Para calcular a soma dos 11 primeiros termos, precisamos calcular a_{11}.

$$a_{11} = a_1 + 10r$$

$$a_{11} = 125 + 10 \times 11$$

$$a_{11} = 235$$

Vamos agora aplicar a fórmula da soma dos 11 primeiros termos.

$$S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

$$S_{11} = \frac{(125 + 235) \cdot 11}{2}$$

$$S_{11} = 1.980$$

Portanto, Manoel não consegue percorrer os 2 mil metros.

Gabarito: Errado

(CESPE 2018/SEFAZ-RS)

Sobre uma mesa há 9 caixas vazias. Em uma dessas caixas, será colocado um grão de feijão; depois, em outra caixa, serão colocados três grãos de feijão. Prosseguindo-se sucessivamente, será escolhida uma caixa vazia, e nela colocada uma quantidade de grãos de feijão igual ao triplo da quantidade colocada na caixa anteriormente escolhida, até que não reste caixa vazia. Nessa situação, nas 9 caixas será colocada uma quantidade de grãos de feijão igual a

a) $\frac{3^9-1}{2}$

b) $3^9 - 1$

c) $\frac{3^{10}-1}{2}$

d) $3^{10} - 1$

e) $\frac{3^8-3}{2}$

Resolução

As quantidades de feijão em cada caixa formam a seguinte sequência.

$$(\mathbf{1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2.187, 6.561})$$

Na primeira caixa, há apenas um feijão. Essa quantidade vai triplicando de caixa para caixa até a nona caixa.

Para calcular o total de grãos de feijão, devemos somar todas as quantidades.

$$S = 1 + 3 + 9 + 27 + \cdots + 6.561$$

Esses termos formam uma progressão geométrica de razão 3 (e primeiro termo igual a 1).

Para escrever o valor da soma na forma exigida pela questão (em forma de potência), devemos utilizar a fórmula da soma dos termos de uma PG.

$$S = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S = \frac{1 \cdot (3^9 - 1)}{3 - 1}$$

$$S = \frac{3^9 - 1}{2}$$

Gabarito: A

---

9. ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

Análise Combinatória e Probabilidade sempre estão presentes nas provas do CESPE.

Em Análise Combinatória, basicamente, você precisa saber o Princípio Fundamental da Contagem e Combinações. São os assuntos mais cobrados no CESPE.

Vamos revisar estes assuntos através de questões que considero bastante prováveis de aparecer novamente.

(CESPE 2018/EBSERH)

Julgue o próximo item, a respeito de contagem.

Se a enfermaria de um hospital possuir cinco leitos desocupados e se cinco pacientes forem ocupar esses leitos, então haverá mais de 100 formas diferentes de fazer essa ocupação.

Resolução

O problema é resolvido em 5 etapas: escolher o paciente que vai ocupar o primeiro leito, escolher o paciente que vai ocupar o segundo leito, e assim por diante.

Há 5 possibilidades na escolha do paciente que vai ocupar o primeiro leito.

Há 4 possibilidades na escolha do paciente que vai ocupar o segundo leito.

Há 3 possibilidades na escolha do paciente que vai ocupar o terceiro leito.

Há 2 possibilidades na escolha do paciente que vai ocupar o quarto leito.

Há 1 possibilidade na escolha do paciente que vai ocupar o quinto leito.

Pelo princípio fundamental da contagem, há $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ formas de escolher a disposição dos pacientes no leito.

Gabarito: Certo.

(CESPE 2017/Pref. de São Luís)

Em 2015, na cidade de São Luís, 1.560 docentes atuavam

nas escolas de ensino fundamental. Entre eles, havia 450 Marias e 150 Pedros. Esses 1.560 docentes eram distribuídos, para cada escola, de forma aleatória.

Nessa situação, assinale a opção que apresenta a expressão que permite determinar a quantidade de possíveis escolhas para a formação do primeiro grupo de 20 professores de maneira que, nesse grupo, não haja nenhuma Maria e nenhum Pedro.

$a)\ \dfrac{600!}{20! \times 580!}$

$b)\ \dfrac{1.560!}{600!}$

$c)\ \dfrac{300!}{20!}$

$d)\ \dfrac{960!}{600! \times 360!}$

$e)\ \dfrac{960!}{20! \times 940!}$

Resolução

Vamos retirar as 450 Marias e os 150 Pedros do grupo de 1.560 docentes. Restarão 1.560 – 450 – 150 = 960 docentes.

Dos 960 docentes, escolheremos 20. Observe que a ordem dos docentes não influencia na formação do agrupamento. Por isso, vamos utilizar combinações. Há 960 docentes disponíveis e devemos escolher 20.

C_{960}^{20}

A banca requer, neste caso, a utilização da fórmula do número de combinações. Começamos com o fatorial do maior número no numerador e o fatorial do menor número no denominador. Completaremos o denominador colocando o fatorial da diferença entre os números.

$$C_{960}^{20} = \frac{960!}{20! \times 940!}$$

Gabarito: E

(CESPE 2014/PMCE)

Considerando que um grupamento de 60 policiais militares em que haja 15 mulheres e 45 homens seja dividido em 10 equipes de 6 militares para monitorar determinada área, julgue o item subsequente.

Se as 2 primeiras equipes formadas forem constituídas apenas por mulheres, então o número de maneiras distintas de escolher os membros dessas equipes será igual a $\frac{15!}{6!\cdot 6!\cdot 3!}$.

Resolução

Há 15 mulheres e devemos escolher 6 para a primeira equipe. Em seguida, sobram 9 mulheres das quais devemos escolher 6 para a segunda equipe.

Observe que queremos colocar 6 mulheres na primeira equipe e 6 mulheres na segunda equipe. Como o conectivo usado é "e", devemos multiplicar as quantidades.

O total de maneiras para escolher os membros dessa equipe é

$$C_{15}^{6} \cdot C_{9}^{6} = \frac{15!}{6!\,9!} \cdot \frac{9!}{6!\,3!} = \frac{15!}{6!\,6!\,3!}$$

Gabarito: certo.

(CESPE 2014/PMCE)

Considerando que um grupamento de 60 policiais militares em que haja 15 mulheres e 45 homens seja dividido em 10 equipes de 6 militares para monitorar determinada área, julgue o item subsequente.

O número de maneiras distintas de escolher 6 militares para formarem a primeira equipe, de tal forma que essa equipe tenha pelo menos cinco mulheres, é inferior a $\frac{4 \cdot 15!}{9! \cdot 5!}$.

Resolução

Podemos ter equipe com 5 mulheres e 1 homem ou 6 mulheres. Lembre-se que "e" indica multiplicação e "ou" indica adição.

Assim, vamos escolher 5 mulheres (dentre 15 disponíveis) e 1 homem (dentre 45 disponíveis) ou 6 mulheres (dentre 15 disponíveis).

$$C_{15}^{5} \cdot C_{45}^{1} + C_{15}^{6} = \frac{15!}{5!\,10!} \cdot 45 + \frac{15!}{6!\,9!} =$$

$$= \frac{15!}{5!\,10 \cdot 9!} \cdot 45 + \frac{15!}{6!\,9!}$$

$$= \frac{15! \cdot 4{,}5}{5! \cdot 9!} + \frac{15!}{6!\,9!}$$

Observe o fato de que 10! = 10 x 9!. Depois dividimos 45 por 10.

A primeira parcela sozinha já é maior que o número dado no enunciado.

Gabarito: errado.

(CESPE 2018/ABIN)

Como forma de melhorar a convivência, as famílias Turing, Russell e Gödel disputaram, no parque da cidade, em um domingo à tarde, partidas de futebol e de vôlei. O quadro a seguir mostra os quantitativos de membros de cada família presentes no parque, distribuídos por gênero.

família	masculino	feminino
Turing	5	7
Russell	6	5
Gödel	5	9

A partir dessa tabela, julgue os itens subsequentes.

Considere que, em eventual sorteio de brindes, um nome tenha sido retirado, ao acaso, do interior de uma urna que continha os nomes de todos os familiares presentes no evento. Nessa situação, sabendo-se que o sorteado não é uma mulher da família Gödel, a probabilidade de ser uma mulher da família Russel será superior a 20%.

Resolução

Esta questão homenageia 3 grandes matemáticos: Alan Turing, Bertrand Russel e Kurt Gödel.

Sabemos que a pessoa sorteada não é uma mulher da família Gödel. Vamos excluir as mulheres da família Gödel do nosso espaço amostral.

Portanto, o número de casos possíveis é 5 + 6 + 5 + 7 + 5 = 28.

Queremos calcular a probabilidade de a pessoa sorteada ser uma mulher da família Russel: há 5 casos desejados.

Assim, a probabilidade pedida é 5/28 $\cong 17{,}8\%$.

Gabarito: Errado

(CESPE 2017/SEDF)

Cinco mulheres e quatro homens trabalham em um escritório. De forma aleatória, uma dessas pessoas será escolhida para trabalhar no plantão de atendimento ao público no sábado. Em seguida, outra pessoa será escolhida, também aleatoriamente, para o plantão no domingo.

Considerando que as duas pessoas para os plantões serão selecionadas sucessivamente, de forma aleatória e sem reposição, julgue os próximos itens.

1. A probabilidade de os dois plantonistas serem homens é igual ou superior a 4/9.
2. A probabilidade de os plantões serem feitos por um homem e uma mulher é igual a 5/9.

Resolução

Item 1:

A probabilidade de o primeiro ser homem é 4/9. A probabilidade de o segundo ser homem é 3/8. Assim, a probabilidade pedida é

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{12}{72} = \frac{1}{6} \cong 0{,}16$$

Este número é menor que 4/9 = 0,444...

O item 1 está errado.

Item 2:

Podemos ter (H e M) ou (M e H).

A probabilidade de termos homem no sábado e mulher no domingo é (4/9) x (5/8).

A probabilidade de termos mulher no sábado e homem no domingo é (5/9) x (4/8).

A probabilidade pedida é

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{20}{72} + \frac{20}{72} = \frac{40}{72} = \frac{5}{9}$$

O item 2 está certo.

Gabarito: Errado, Certo

10. Descrição e Análise de Dados

Para calcular a média aritmética, basta somar todos os elementos e dividir pela quantidade de elementos.

$$\boxed{\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}}$$

Um macete muito legal para resolver questões de média aritmética é o seguinte:

Se é dada a média de um conjunto, basta multiplicar a média pela quantidade de termos para calcular a soma total. Por exemplo, se a média salarial de 8 pessoas é de 1.500 reais, então, juntos, eles recebem 8 x 1.500 = 12.000 reais.

Isto é decorrente da própria definição de média aritmética.

$$\overline{x} = \frac{Soma}{n} \Leftrightarrow Soma = n \cdot \overline{x}$$

FIQUE ATENTO!

Se um problema simplesmente pedir para calcular a média sem especificar qual o tipo de média, você deverá calcular a média aritmética.

HORA DE PRATICAR!

(CESPE 2016/FUNPRESP)

adesão ao plano	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**
salário (em R$)	5.000	8.000	4.000	6.000	2.000	3.000	4.000	4.000	4.500	7.000

Considerando que os dados na tabela mostram salários de diferentes servidores que aderiram (1) ou não aderiram (0) a determinado plano de previdência complementar, julgue o item subsecutivo.

A média dos salários do grupo que aderiu ao plano de previdência complementar é menor que a do que não aderiu ao plano.

Comentários:

Temos duas listas de números: uma formada pelos salários dos servidores que aderiram ao plano de previdência complementar e outra formada pelos salários dos servidores que não aderiram ao plano.

Os servidores que aderiram ao plano estão indicados pelo número 1 e os servidores que não aderiram estão indicados pelo número 0.

Queremos calcular a média. Como não foi especificada a média, deveremos trabalhar com a média aritmética.

Para tanto, basta somar os elementos correspondentes a cada grupo e dividir pela quantidade de elementos do grupo.

Salários dos servidores que aderiram ao plano: 5.000, 8.000, 6.000, 4.000, 4.500. São cinco os servidores que aderiram ao plano. A média destes salários é:

$$\overline{x_1} = \frac{5.000 + 8.000 + 6.000 + 4.000 + 4.500}{5} = \frac{27.500}{5} = 5.500$$

Salários dos servidores que não aderiram ao plano: 4.000, 2.000, 3.000, 4.000, 7.000. São cinco os servidores que não aderiram ao plano. A média destes salários é:

$$\overline{x_2} = \frac{4.000 + 2.000 + 3.000 + 4.000 + 7.000}{5} = \frac{20.000}{5} = 4.000$$

A média dos salários dos servidores que aderiram ao plano é MAIOR do que a média dos salários dos servidores que não aderiram ao plano.

Gabarito: Errado

Imagine que um estudante realizou 4 provas e obteve as seguintes notas: 8; 9,5; 7,5 e 9. A sua média é

$$\overline{x} = \frac{8 + 9{,}5 + 7{,}5 + 9}{4} = \frac{34}{4} = 8{,}5$$

Até aí tudo ok. Usamos a média aritmética simples quando todos os valores da lista têm a mesma "importância".

Vamos supor agora que o estudante prestou vestibular para Engenharia e realizou provas de Matemática, Física, Química, História e Biologia.

Ora, como o estudante está concorrendo a uma vaga no curso de Engenharia, é esperado que matérias de exatas tenham um **peso** maior (uma importância maior). É aqui que entra o conceito da média ponderada.

Vamos assumir que o peso de Matemática seja 4, de Física seja 5, de Química seja 3, de História seja 1 e de Biologia seja 2. Suponha ainda que o estudante obteve as seguintes notas:

Matéria	Nota (x_i)	Peso (p_i)
Matemática	9,5	4
Física	8,5	5
Química	7	3
História	5	1
Biologia	4	2

Para calcular a média aritmética ponderada (em que levamos em consideração os pesos de cada matéria), devemos multiplicar cada nota pelo seu respectivo peso, somar tudo e dividir pela soma dos pesos.

Matéria	Nota (x_i)	Peso (p_i)	Nota x Peso
Matemática	9,5	4	9,5 x 4 = 38
Física	8,5	5	8,5 x 5 = 42,5
Química	7	3	7 x 3 = 21
História	5	1	5 x 1 = 5
Biologia	4	2	4 x 2 = 8

$$\overline{x} = \frac{38 + 42{,}5 + 21 + 5 + 8}{4 + 5 + 3 + 1 + 2} = \frac{114{,}5}{15} \cong 7{,}63$$

Vamos generalizar. Se temos uma lista de números $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ com pesos respectivos $(p_1, p_2, \dots, p_n)$, então a média aritmética ponderada é dada por:

$$\boxed{\overline{x} = \frac{x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}}$$

(CESPE 2015/TELEBRAS/Técnico em Gestão de Telecomunicações) A equipe de atendentes de um serviço de telemarketing é constituída por 30 empregados, divididos em 3 grupos, que trabalham de acordo com a seguinte escala.

- Grupo I: 7 homens e 3 mulheres, que trabalham das 6 h às 12 h.

- Grupo II: 4 homens e 6 mulheres, que trabalham das 9 h às 15 h.

- Grupo III: 1 homem e 9 mulheres, que trabalham das 12 h às 18 h. A respeito dessa equipe, julgue o item que se segue.

Se, nesse serviço de telemarketing, a média das idades das atendentes for de 21 anos e a média das idades dos atendentes for de 31 anos, então a média das idades de todos os 30 atendentes será de 26 anos.

Resolução

O total de homens é 7 + 4 + 1 = 12 e o total de mulheres é 3 + 6 + 9 = 18.

A média global é a média ponderada das médias dos homens e das mulheres e os pesos de ponderação são as quantidades de homens em mulheres.

Vamos, então, multiplicar a média dos homens pela quantidade de homens, a média das mulheres pela quantidade de mulheres, somar tudo e dividir pela quantidade total de pessoas, que é a soma dos pesos.

$$\overline{x} = \frac{\overline{h} \cdot 12 + \overline{m} \cdot 18}{12 + 18} = \frac{31 \cdot 12 + 21 \cdot 18}{30} = \frac{750}{30} = 25$$

Gabarito: Errado.

Vamos agora focar nas medidas usuais: média aritmética, mediana e moda.

Exemplo: Em um grupo de pessoas encontramos as seguintes idades: 20, 30, 50, 39, 20, 25, 41, 47, 36, 45, 41, 52, 18, 41. A mediana e a moda são, respectivamente,

a) 36 e 45.

b) 40 e 41.

c) 41 e 20.

d) 42 e 39.

e) 39 e 42.

Resolução

Vamos organizar os dados em ordem crescente para facilitar a nossa vida.

$$18, 20, 20, 25, 30, 36, 39, 41, 41, 41, 45, 47, 50, 52$$

Vamos começar pela moda, que é mais fácil. A moda é o termo que possui maior frequência, ou seja, que aparece mais vezes.

O número mais frequente é o 41. Portanto,

$$M_o = 41$$

Com isso já podemos marcar a resposta na alternativa B.

Quando o número de termos n é ímpar, a mediana é o termo central, ou seja, é o termo de posição $\frac{n+1}{2}$.

Quando o número de termos n é par, temos dois termos centrais: o termo de posição $\frac{n}{2}$ e o próximo. A mediana será a média aritmética entre os dois termos centrais.

No nosso caso, temos 14 números. Como 14 é par, então a mediana será a média aritmética entre os dois termos centrais: o sétimo e o oitavo.

O sétimo termo é 39 e o oitavo termo é 41. Portanto,

$$M_d = \frac{39 + 41}{2} = 40$$

Gabarito: B

Exemplo:

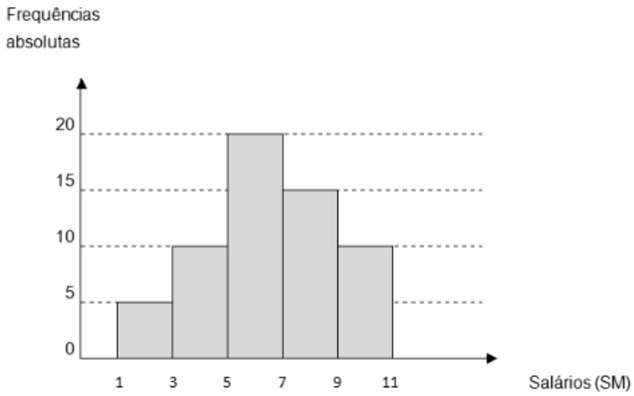
Analisando a distribuição dos salários dos empregados de uma empresa em número de salários mínimos (SM), obteve-se o histograma de frequências absolutas abaixo com os intervalos de classe fechados à esquerda e abertos à direita. Considere que:

I. Me é a média aritmética dos salários, calculada levando em conta que todos os valores incluídos num certo intervalo de classe são coincidentes com o ponto médio deste intervalo.

II. Md é a mediana dos salários, calculada por meio do método da interpolação linear.

III. Mo é a moda dos salários, calculada com a utilização da fórmula de King*.

$* \, Mo = L + \frac{f^{**}}{f^{*}+f^{**}} \times h$, em que L é o limite inferior da classe modal (classe em que se verifica, no caso, a maior frequência), f^{*} é a frequência da classe anterior à classe modal, f^{**} é a frequência da classe posterior à classe modal e h é a amplitude do intervalo de classe correspondente.



O valor de (Me + Md + Mo) é, em SM, igual a

a) 18,6

b) 19,7

c) 19,2

d) 18,7

e) 18,5

Resolução

Vamos construir uma tabelinha com os dados do gráfico.

Classe	f_i
$1 - 3$	5
$3 - 5$	10
$5 - 7$	20
$7 - 9$	15
$9 - 11$	10

Para calcular a média aritmética, precisamos calcular os pontos médios das classes.

Classe	f_i	x_i
$1 - 3$	5	2
$3 - 5$	10	4
$5 - 7$	20	6
$7 - 9$	15	8
$9 - 11$	10	10

Agora devemos multiplicar cada ponto médio pela sua respectiva frequência. Em seguida, vamos somar os resultados obtidos e dividir pela frequência total.

Classe	f_i	x_i	$x_i \cdot f_i$
$1 - 3$	5	2	5 x 2 = 10
$3 - 5$	10	4	10 x 4 = 40
$5 - 7$	20	6	20 x 6 = 120
$7 - 9$	15	8	15 x 8 = 120
$9 - 11$	10	10	10 x 10 = 100
Total	60		390

Portanto,

$$M_e = \frac{390}{60} = 6{,}5$$

Vamos agora calcular a mediana. Para tanto, precisamos obter a coluna com as frequências acumuladas.

É muito simples. Primeiro, repetimos a frequência da primeira classe. Depois é só ir somando com a frequência da classe seguinte. Observe:

Classe	f_i	$f_{acumulada}$
$1 - 3$	5	5
$3 - 5$	10	5 + 10 = 15
$5 - 7$	20	15 + 20 = 35
$7 - 9$	15	35 + 15 = 50
$9 - 11$	10	50 + 10 = 60

Obviamente, você faria essas contas de cabeça. Vamos deixar a tabela um pouco mais limpa como se você tivesse feito essas somas de cabeça.

Classe	f_i	$f_{acumulada}$
$1 - 3$	5	5
$3 - 5$	10	15
$5 - 7$	20	35
$7 - 9$	15	50
$9 - 11$	10	60

No cálculo da mediana em uma distribuição de frequência não teremos a preocupação de determinarmos se o número de elementos é par ou ímpar.

Os passos básicos para determinar a mediana de uma distribuição serão:

- Descobrir a classe mediana.
- Aplicar a fórmula da mediana para distribuição de frequências.

Para determinarmos a classe mediana, deveremos calcular o valor $\frac{n}{2}$. No nosso exemplo, $\frac{n}{2} = \frac{60}{2} = 30$.

Em seguida comparamos esse valor com os valores da frequência absoluta acumulada crescente. Procuraremos a classe cuja frequência acumulada seja maior ou igual ao valor de $\frac{n}{2} = 30$.

A primeira frequência acumulada que é maior do que ou igual a 30 é 35. Portanto, a classe mediana é $5 - 7$.

Em outras palavras, a mediana é um número entre 5 e 7.

Eis a fórmula para o cálculo da mediana.

$$M_d = l_{inf} + \left(\frac{\frac{n}{2} - f_{ant}}{f_i}\right) \times h$$

Nesta fórmula:

- l_{inf} é o limite inferior da classe mediana, ou seja, $l_{inf} = 5$.
- f_{ant} é a frequência acumulada da classe anterior à classe mediana, ou seja, $f_{ant} = 15$.
- f_i é a frequência absoluta da classe mediana, ou seja, $f_i = 20$.
- h é a amplitude da classe mediana, ou seja, $h = 7 - 5 = 2$.

Logo,

$$M_d = 5 + \left(\frac{30 - 15}{20}\right) \times 2 = 6{,}5$$

Finalmente, vamos calcular a moda de King.

A classe modal é aquela que possui a maior frequência absoluta simples. Como a maior frequência simples é 20, então a classe modal é $5 - 7$.

O próprio enunciado ensinou a calcular a moda de King.

$* \, Mo = L + \frac{f^{**}}{f^{*} + f^{**}} \times h$, em que L é o limite inferior da classe modal (classe em que se verifica, no caso, a maior frequência), f^{*} é a frequência da classe anterior à classe modal, f^{**} é a frequência da classe posterior à classe modal e h é a amplitude do intervalo de classe correspondente.

- $L = 5$
- $f^{*} = 10$
- $f^{**} = 15$
- $h = 7 - 5 = 2$

Agora é só aplicar a fórmula.

$$Mo = L + \frac{f^{**}}{f^{*} + f^{**}} \times h$$

$$Mo = 5 + \frac{15}{10 + 15} \times 2$$

$$Mo = 5 + \frac{30}{25} = 6{,}2$$

Agora podemos marcar a resposta da questão.

$$M_e + M_d + M_o = 6{,}5 + 6{,}5 + 6{,}2 = 19{,}2$$

Com isso, a resposta está na alternativa C.

A questão não pediu, mas vamos calcular a moda de Czuber para treinar.

Classe	f_i
$1 - 3$	5
$3 - 5$	10
$5 - 7$	20
$7 - 9$	15
$9 - 11$	10

$$M_{O_C} = l_{inf} + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times h$$

Onde:

- l_{inf} é o limite inferior da classe moda, ou seja $l_{inf} = 5$.
- Δ_1 é a diferença entre a frequência da classe modal (maior frequência) e a frequência anterior a ela, ou seja, $\Delta_1 = 20 - 10 = 10$.
- Δ_2 é a diferença entre a frequência da classe modal (maior frequência) e a frequência posterior a ela, ou seja, $\Delta_2 = 20 - 15 = 5$.
- h é a amplitude da classe modal, ou seja, $h = 7 - 5 = 2$.

Portanto, a moda de Czuber é:

$$M_{O_C} = 5 + \frac{10}{10+5} \times 2 \cong 6{,}33$$

Gabarito: C

Exemplo:

O departamento de operações de uma autarquia do Estado fez um levantamento do número de acidentes em um determinado trecho de rodovia no ano de 2016, conforme tabela a seguir.

Mês	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
Nº de Acidentes	36	28	12	5	3	2	2	4	9	11	22	38

Os números indicam que há uma dispersão significativa, portanto o desvio padrão para esta amostra é representado por

a) 13,30.

b) 14,33.

c) 12,74.

d) 10,40.

e) 11,50.

Resolução

Vamos calcular a variância amostral. No final, basta calcular a raiz quadrada para calcular o desvio padrão.

Para calcular a variância, vamos calcular a média dos números e também a média dos quadrados dos números.

- Média

Para calcular a média aritmética simples, basta somar os dados e dividir pela quantidade de termos.

$$\overline{x} = \frac{36+28+12+5+3+2+2+4+9+11+22+38}{12} = \frac{172}{12} = \frac{43}{3}$$

- Média dos quadrados

Para calcular a média dos quadrados, devemos elevar todos os números ao quadrado, somar os resultados, e dividir pela quantidade de termos.

$$\overline{x^2} = \frac{36^2 + 28^2 + 12^2 + 5^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2 + 4^2 + 9^2 + 11^2 + 22^2 + 38^2}{12}$$

$$\overline{x^2} = \frac{1.296 + 784 + 144 + 25 + 9 + 4 + 4 + 16 + 81 + 121 + 484 + 1.444}{12}$$

$$\overline{x^2} = \frac{4.412}{12} = \frac{1.103}{3}$$

Se estivéssemos interessados no cálculo da variância populacional, bastaria fazer:

$$\sigma^2 = (Média\ dos\ quadrados) - (Média)^2$$

$$\sigma^2 = \left(\overline{x^2}\right) - (\overline{x})^2$$

$$\sigma^2 = \left(\frac{1.103}{3}\right) - \left(\frac{43}{3}\right)^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1.103}{3} - \frac{1.849}{9}$$

$$\sigma^2 = \frac{3.309 - 1.849}{9}$$

$$\sigma^2 = \frac{1.460}{9}$$

Como queremos calcular a variância AMOSTRAL, devemos multiplicar a variância populacional por um fator de correção. Este fator de correção é $\frac{n}{n-1}$.

$$s^2 = \sigma^2 \times \frac{n}{n-1}$$

$$s^2 = \frac{1.460}{9} \times \frac{12}{11}$$

$$s^2 = 176{,}97$$

O desvio padrão é a raiz quadrada da variância.

$$\sigma = \sqrt{176{,}97}$$

Como $13^2 = 169$ e $14^2 = 196$, então $\sqrt{176{,}97}$ é um número entre 13 e 14.

Gabarito: A

Exemplo:

Uma população é formada por 100 números estritamente positivos x_i com $1 \leq i \leq 100$, ou seja, $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{100}\}$, em que x_i representa a renda familiar anual da família i, em milhares de reais.

Dados:

$$\sum_{i=1}^{100} x_i = 6.400\ mil\ reais\ e\ \sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 467.200\ (mil\ reais)^2$$

O coeficiente de variação desta população é igual a:

a) 37,5%

b) 18,0%

c) 32,5%

d) 24,0%

e) 27,5%

Resolução

O coeficiente de variação é o quociente entre o desvio padrão e a média. Vamos calcular estas medidas.

- Média

Basta somar os números e dividir pela quantidade de famílias, que é 100.

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{100}}{100} = \frac{6.400}{100} = 64$$

Antes de calcular o desvio padrão, precisamos calcular a média dos quadrados.

- Média dos quadrados

Para calcular a média dos quadrados, devemos elevar todos os números ao quadrado, somar os resultados, e dividir pela quantidade de termos.

$$\overline{x^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{100}^2}{100} = \frac{467.200}{100} = 4.672$$

Agora estamos prontos para calcular a variância populacional.

$$\sigma^2 = (Média\ dos\ quadrados) - (Média)^2$$

$$\sigma^2 = \left(\overline{x^2}\right) - (\overline{x})^2$$

$$\sigma^2 = 4.672 - 64^2$$

$$\sigma^2 = 576$$

O desvio padrão é a raiz quadrada da variância.

$$\sigma = \sqrt{576} = 24$$

Agora podemos calcular o coeficiente de variação.

$$CV = \frac{\sigma}{\overline{x}} = \frac{24}{64} = 0{,}375 = 37{,}5\%$$

Gabarito: A

---

11. Noções de Geometria

O perímetro de um polígono é a soma das medidas dos seus lados. No caso de uma circunferência, seu perímetro é o seu comprimento e vale $2 \cdot \pi \cdot r$.

As principais fórmulas de área para memorizar:

- Área do retângulo: $A = base \times altura$
- Área do triângulo: $A = \frac{1}{2} \times base \times altura$
- Área do círculo: $A = \pi r^2$
- Área do triângulo equilátero de lado l: $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$

O teorema de Pitágoras afirma que o quadrado da medida da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Assim, se a hipotenusa de um triângulo retângulo é “a” e os catetos são “b” e “c”, então:

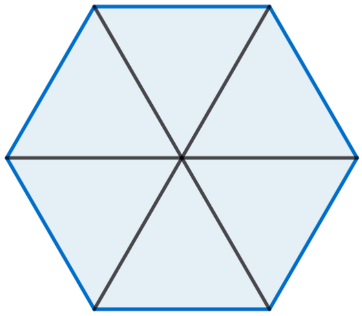
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Desta fórmula, decorre que:

- a diagonal de um quadrado de lado l é $d = l\sqrt{2}$.
- a altura de um triângulo equilátero de lado l é $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$.

Recentemente, o CESPE cobrou a área de um hexágono regular.

Qualquer hexágono regular pode ser dividido em 6 triângulos equiláteros. Observe:



A área de um triângulo equilátero de lado $\boldsymbol{L}$ é dada por:

$$\frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

Assim, para calcular a área de um hexágono regular, basta multiplicar a fórmula acima por 6.

$$6 \times \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

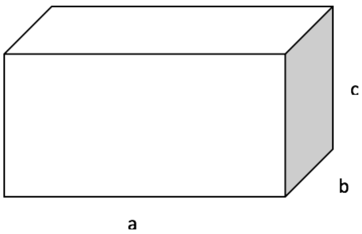
Vamos agora aos sólidos geométricos.

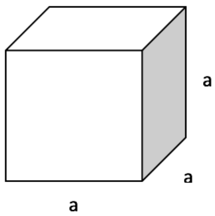
Esfera	
Volume	$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$
Área da Superfície	$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

Cilindro Reto	
Área da base	$A_b = \pi r^2$
Área da superfície lateral	$A_l = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$
Volume	$V = \pi r^2 \cdot h$
Cilindro equilátero	$h = 2r$

Cone Reto	
Área da base	$A_b = \pi r^2$
Área da superfície lateral	$A_l = \pi \cdot r \cdot g$
Volume	$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$
Cone equilátero	$g = 2r$

Observe, por final, o paralelepípedo reto-retângulo e o cubo.





Na realidade, o cubo é apenas um caso particular do paralelepípedo reto-retângulo. Basta fazer $a = b = c$.

Pois bem o volume de um paralelepípedo reto-retângulo é o produto das suas três dimensões.

$$V = abc$$

No caso do cubo, o volume fica:

$$V = a \cdot a \cdot a$$

$$V = a^3$$

As faces do paralelepípedo são retangulares, enquanto as faces do cubo são todas quadradas.

A diagonal do cubo mede $a\sqrt{3}$.

SISTEMA MÉTRICO

A unidade de comprimento fundamental no sistema métrico é o "metro". Seu símbolo é m.

Seus múltiplos são: decâmetro (dam), hectômetro (hm), quilômetro (km).

Seus submúltiplos são: decímetro (dm), centímetro (cm), milímetro (mm).

Temos a seguinte tabela:

km	hm	dam	m	dm	cm	mm

Para avançar para a direita nesta tabela, multiplicamos a medida por 10 por cada casa.

Para avançar para a direita nesta tabela, dividimos a medida por 10 por cada casa.

<u>Exemplo</u>: Transformar 15,4 dam para cm.

Ora, de "dam" para "cm", avançamos 3 casas para a direita. Assim, devemos multiplicar a medida por 10 x 10 x 10 = 1.000.

$$15{,}4\ dam = 15{,}4 \times 1.000\ cm = 15.400\ cm$$

<u>Exemplo</u>: Transformar 27,04mm para dm.

De mm para dm, avançamos duas casas para a esquerda. Assim, deveremos dividir a medida por 10 x 10 = 100.

$$27{,}04\ mm = \frac{27{,}04}{100} dm = 0{,}2704\ dm$$

Este mesmo procedimento é usado para medidas de massa (múltiplos e submúltiplos do grama) e e medidas de capacidade (múltiplos e submúltiplos do litro).

kg	hg	dag	g	dg	cg	mg

kl	hl	dal	l	dl	cl	ml

<u>Exemplo</u>: Transformar 2,403 kg para mg.

De kg para mg, devemos avançar 6 casas para a direita. Assim, vamos multiplicar a medida por 10 x 10 x 10 x 10 x 10 x 10 = 1.000.000.

$$2{,}403\ kg = 2{,}403 \times 1.000.000 mg = 2.403.000\ mg$$

<u>Exemplo</u>: Transformar 1.405,8 ml para litros.

De ml para litros, devemos avançar 3 casas para a esquerda. Assim, basta dividir a medida por 10 x 10 x 10 = 1.000.

$$1.405{,}8\ ml = \frac{1.405{,}8}{1.000} l = 1{,}4058\ l$$

Agora vem o detalhe para medidas de superfície (múltiplos e submúltiplos de m^2) e volume (múltiplos e submúltiplos de m^3).

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2

Neste caso, na mudança de unidades de área, devemos multiplicar por 100 a cada passagem para a direita ou dividir por 100 a cada passagem para a esquerda.

<u>Exemplo</u>: Transformar 2,04 m^2 para cm^2.

Como devemos avançar duas casas para a direita, devemos multiplicar a medida por 100 x 100 = 10.000.

$$2{,}04\ m^2 = 2{,}04 \times 10.000 cm^2 = 20.400\ cm^2$$

km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3

Neste caso, na mudança de unidades de volume, devemos multiplicar por 1.000 a cada passagem para a direita ou dividir por 1.000 a cada passagem para a esquerda.

<u>Exemplo</u>: Transformar 3.067.000 mm^3 para m^3.

Como devemos avançar três casas para a esquerda, devemos dividir a medida por 1.000 x 1.000 x 1.000 = 1.000.000.000.

$$3.67.00 \quad mm^3 = \frac{3.067.000}{1.000.000.000} m^3 = 0{,}003067\ m^3$$

12. CONJUNTOS

Neste tópico, o mais importante é saber resolver questões sobre o Princípio da Inclusão-Exclusão (fórmula da união) e também algumas questões que sejam rapidamente resolvidas com diagramas.

O **Princípio da Inclusão-Exclusão** é uma **fórmula para calcular o número de elementos que pertencem à união de vários conjuntos**.

Na sua forma mais simples, o princípio afirma que

$$\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$$

ESTA CAI NA PROVA!

$n(A \cup B)$ é o número de elementos que pertencem a **pelo menos um** dos conjuntos A e B.

ESCLARECENDO

Para contar os elementos de $A \cup B$, contamos todos os elementos de A e todos os elementos de B.

Desta forma, os elementos da interseção foram contados duas vezes, uma em A e outra em B.

Portanto, devemos descontar a segunda contagem desses elementos e obtemos a fórmula acima.

Há uma expressão parecida quando estão envolvidos **três conjuntos**:

$$\boldsymbol{n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)}$$

Para facilitar a memorização, escreveremos de outra maneira:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$$
$$-n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)$$
$$+n(A \cap B \cap C)$$

$n(A \cup B \cup C)$ é o número de elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A, B e C.

O raciocínio é o mesmo demonstrado acima para 2 conjuntos.

Para contar os elementos de $A \cup B \cup C$, contamos os elementos de A, de B e de C. Desta forma, os elementos de $A \cap B$ foram contados duas vezes (uma em A e outra em B), o mesmo ocorrendo com os elementos de $A \cap C$ e $B \cap C$. Portanto, devemos descontar uma vez $n(A \cap B)$, $n(A \cap C)$ e $n(B \cap C)$.

Por fim, os elementos de $A \cap B \cap C$ foram contados três vezes (em A, em B e em C) e descontados três vezes (em $A \cap B$, em $A \cap C$ e em $B \cap C$). Contados três vezes e descontados três vezes significa que eles não foram contados. Devemos, portanto, incluí-los novamente na contagem obtendo a fórmula acima.

(CESPE/2018/SEFAZ-RS)

Em determinado dia, os órgãos responsáveis atenderam 50 contribuintes para resolver pendências relativas ao IPTU, ao IPVA e a outros tributos. Sabe-se que foram atendidos:

- 18 contribuintes com pendências de IPTU;
- 23 contribuintes com pendências de IPVA;
- 8 contribuintes com pendências de IPTU e IPVA.

Nesse caso, a quantidade de contribuintes atendidos cujas pendências não se referiam a IPTU nem a IPVA foi igual a

a) 9.

b) 10.

c) 15.

d) 17.

e) 25.

Resolução

Podemos rapidamente utilizar o **Princípio da Inclusão-Exclusão** para determinar a quantidade de contribuintes que possuem pendências de IPTU ou IPVA.

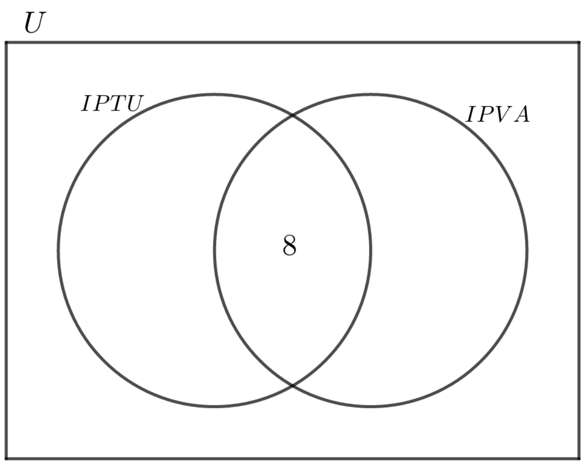
$$\boldsymbol{n(IPTU\ ou\ IPVA) = n(IPTU) + n(IPVA) - n(IPTU\ e\ IPVA)}$$

$$\boldsymbol{n(IPTU\ ou\ IPVA) = 18 + 23 - 8}$$

$$\boldsymbol{n(IPTU\ ou\ IPVA) = 33}$$

Portanto, 33 contribuintes foram atendidos para resolver pendências de IPTU ou de IPVA. A quantidade de pessoas que foram atendidas por outros motivos é igual a 50 – 33 = 17.

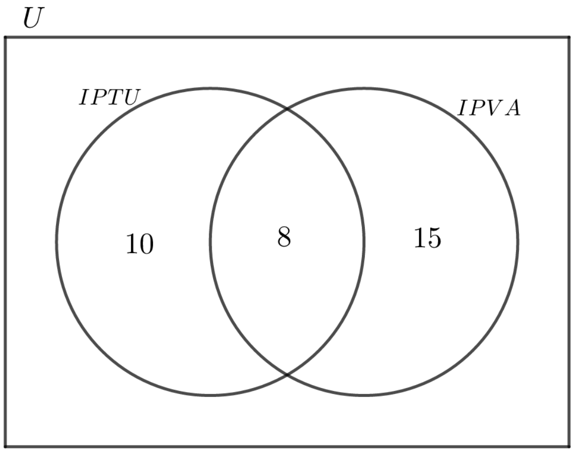
Poderíamos também ter resolvido com diagramas.



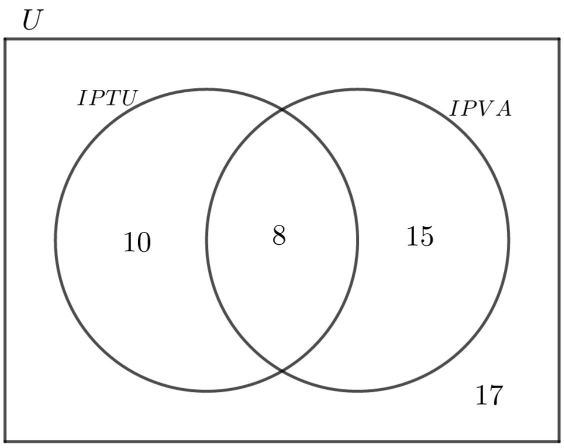
Sabemos também que:

- 18 contribuintes com pendências de IPTU;
- 23 contribuintes com pendências de IPVA;

Portanto, 18 – 8 = 10 pessoas foram atendidas para resolver pendências apenas sobre IPTU e 23 – 8 = 15 pessoas foram resolver apenas pendências sobre IPVA.



Já temos $10 + 8 + 15 = 33$ pessoas no diagrama. Como o total de pessoas é 50, então ainda faltam $50 - 33 = 17$ pessoas, que correspondem às pessoas que foram resolver outras pendências.



Gabarito: D

13. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ficamos por aqui, queridos alunos. Espero que tenham gostado da revisão.

Você também pode me encontrar no instagram @profguilhermeneves ou entrar em contato diretamente comigo pelo meu email profguilhermeneves@gmail.com.

Um forte abraço!!!

Guilherme Neves

56