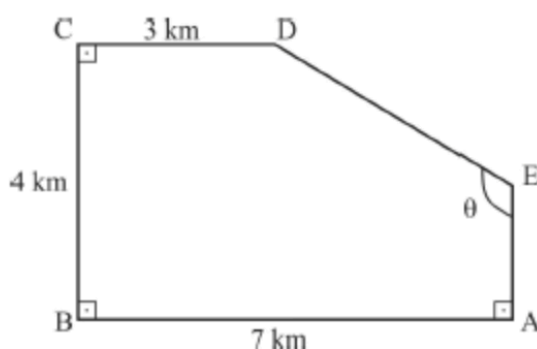


PROVA RESOLVIDA – SEFAZ/RS – VERSÃO PARA PRF



1. (CESPE 2018/SEFAZ-RS)

A figura seguinte ilustra um terreno pentagonal no qual será semeado um cultivar que, para desenvolver-se livre de parasitas, receberá a aplicação, para cada hectare, de 0,5 L de um herbicida especial cujo litro custa R\$ 60.



Os cinco lados do terreno são retos e formam o pentágono ABCDE antecedente, em que os ângulos nos vértices A, B e C são retos, $AB = 7$ km, $BC = 4$ km e $CD = 3$ km. Sabe-se também que o ângulo no vértice E é θ , em que $\operatorname{tg} \theta = -2$ e $\operatorname{tg}(\pi - \theta) = 2$.

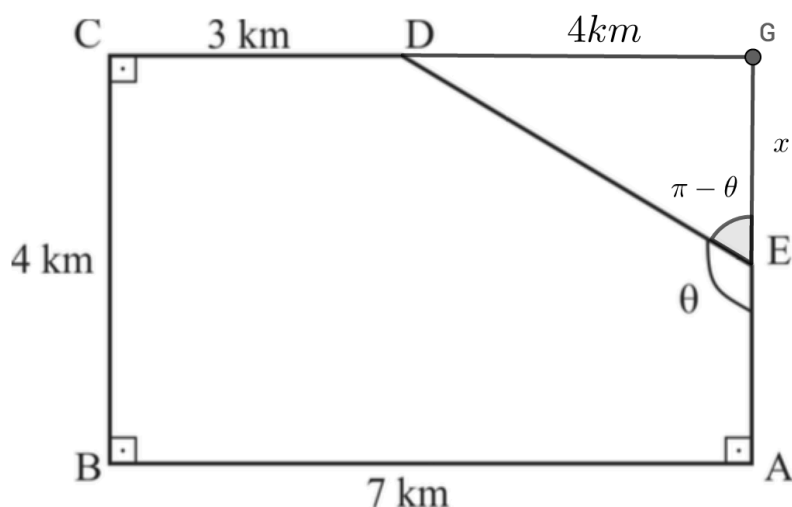
Na situação apresentada, o custo do herbicida a ser aplicado no terreno será de

- a) R\$ 600.
- b) R\$ 720.
- c) R\$ 60.000.
- d) R\$ 72.000.
- e) R\$ 6.000.000.

Resolução



Observe que o terreno pode ser visto como um retângulo menos um triângulo retângulo.



Ao construir o triângulo retângulo DGE, perceba que o ângulo DEG é o suplemento de θ , ou seja, é 180° ($\pi \text{ rad}$) menos θ .

O comprimento do lado DG é $7 - 3 = 4 \text{ km}$.

Vamos calcular a tangente de $\pi - \theta$ no triângulo DGE. Lembre-se que tangente é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e o cateto adjacente.

$$\operatorname{tg}(\pi - \theta) = \frac{4}{x}$$

$$2 = \frac{4}{x}$$

$$x = 2$$

A área do pentágono é igual à diferença entre a área do retângulo (de lados 4 e 7) e o triângulo retângulo (de base 4 e altura $x = 2$).

$$A_{ABCDE} = A_{ABCG} - A_{DGE}$$

$$A_{ABCDE} = 4 \times 7 - \frac{4 \times 2}{2}$$

$$A_{ABCDE} = 24 \text{ km}^2$$

Um hectare equivale a um quadrado de lado 100 metros.

$$1 \text{ ha} = 100 \text{ m} \times 100 \text{ m} = 10.000 \text{ m}^2$$

Vamos transformar a área, que foi calculada em km^2 para m^2 .

$$A_{ABCDE} = 24 \text{ km}^2$$

$$A_{ABCDE} = 24 \times (1.000 \text{ m})^2$$

$$A_{ABCDE} = 24 \times 1.000.000 \text{ m}^2$$

$$A_{ABCDE} = 24.000.000 \text{ m}^2$$

Como cada hectare equivale a 10.000 m^2 , então vamos dividir o valor acima por 10.000 para achar a área em hectares.

$$A_{ABCDE} = \frac{24.000.000}{10.000} = 2.400 \text{ ha}$$

Para hectare, deveremos usar 0,5 L de herbicida.

$$0,5 \times 2.400 = 1.200 \text{ L de herbicida}$$

Cada litro custa R\$ 60,00. Portanto, o custo total será:

$$1.200 \times 60 = 72.000 \text{ reais}$$

Gabarito: D

2. (CESPE/2018/SEFAZ-RS)

Em uma tecelagem, o custo de produção e o custo de venda de x metros de tecido são expressos, respectivamente, por $C_p(x) = 2bx$ e $C_v(x) = c + dx$, em que b, c e d são constantes reais e d é o valor da comissão a ser recebida pelo vendedor para cada metro de tecido vendido. Na produção e venda de 50 m de tecido, tem-se que $C_p(50) + C_v(50) = 420$ e a comissão do vendedor é igual a 100. No caso de produção e venda de 100 m de tecido, $C_p(100) + C_v(100) = 620$. Nesse caso, c, b e d são, respectivamente, iguais a

- a) 220, 1 e 2.
- b) 220, 2 e 2.
- c) 220, 2 e 4.
- d) 200, 1 e 2.
- e) 200, 2 e 2.

Resolução

O valor de d corresponde à comissão do vendedor para cada metro de tecido vendido.

O vendedor obteve uma comissão de 100 para uma venda de 50 m de tecido. Portanto,

$$d = \frac{100}{50} = 2$$

Portanto,

$$C_v(x) = c + 2x$$

Para calcular $C_p(50)$, devemos substituir x por 50 na expressão $C_p(x) = 2bx$. Portanto,

$$C_p(50) = 2b \cdot 50 = 100b$$

Para calcular $C_v(50)$ devemos substituir x por 50 na expressão $C_v(x) = c + 2x$. Portanto,

$$C_v(50) = c + 2 \cdot 50 = c + 100$$

Sabemos que $C_p(50) + C_v(50) = 420$.

$$\underbrace{100b}_{C_p(50)} + \underbrace{c + 100}_{C_v(50)} = 420$$

$$100b + c = 320 \quad \text{Equação (I)}$$

Sabemos também $C_p(100) + C_v(100) = 620$.



Vamos substituir x por 100 nas duas funções.

$$C_p(100) = 2b \cdot 100 = 200b$$

$$C_v(100) = c + 2 \cdot 100 = c + 200$$

Portanto,

$$C_p(100) + C_v(100) = 620$$

$$\underbrace{200b}_{C_p(100)} + \underbrace{c + 200}_{C_v(100)} = 620$$

$$200b + c = 420 \quad \text{Equação II}$$

Temos um sistema de equações.

$$\begin{cases} 100b + c = 320 \\ 200b + c = 420 \end{cases}$$

Vamos multiplicar a primeira equação por -1 para eliminar c .

$$\begin{cases} -100b - c = -320 \\ 200b + c = 420 \end{cases}$$

Somando as duas equações, temos:

$$-100b + 200b = -320 + 420$$

$$100b = 100$$

$$b = 1$$

Vamos substituir na equação I.

$$100b + c = 320$$

$$100 \cdot 1 + c = 320$$

$$c = 220$$

Gabarito: A



3. (CESPE/2018/SEFAZ-RS)

A tabela seguinte mostra as alíquotas para a cobrança do imposto de renda de pessoas físicas, por faixa salarial, em uma economia hipotética.

faixas de renda bruta	alíquota
até \$ 100	isento
acima de \$ 100 e até \$ 500	10%
acima de \$ 500 e até \$ 2.000	20%
acima de \$ 2.000	30%

O imposto é cobrado progressivamente, isto é, sobre a parte da renda bruta do indivíduo que estiver em cada faixa incide o imposto de acordo com a alíquota correspondente.

De acordo com essas informações, se um indivíduo paga \$ 490 de imposto de renda, então a sua renda bruta é

- a) inferior a \$ 1.600.
- b) superior a \$ 1.600 e inferior a \$ 2.100.
- c) superior a \$ 2.100 e inferior a \$ 2.600.
- d) superior a \$ 2.600 e inferior a \$ 3.100.
- e) superior a \$ 3.100.

Resolução

Os primeiros 100 reais que a pessoa ganha são isentos.

Os próximos 400 reais (faixa de 100 a 500 reais) são tributados em 10%.

$$10\% \text{ de } 400 = \frac{10}{100} \times 400 = 40 \text{ reais}$$

Os próximos 1.500 reais que a pessoa ganha (faixa de 500 a 2.000 reais) são tributados em 20%.

$$20\% \text{ de } 1.500 = \frac{20}{100} \times 1.500 = 300 \text{ reais}$$

Assim, uma pessoa que ganha exatamente 2.000 reais paga um imposto de renda igual a

$$0 + 40 + 300 = 340 \text{ reais}$$

O indivíduo paga um total de R\$ 490 de imposto de renda. Assim, o imposto devido pela última faixa salarial corresponde a

$$490 - 340 = 150 \text{ reais}$$

Esse imposto corresponde a 30% do valor do salário que ultrapassa 2.000 reais. Se a pessoa ganha um total de x reais, então a parte que será tributada na última faixa será $x - 2.000$.

O imposto devido pela última faixa é igual a 30% de $x - 2.000$. Esse valor corresponde a 150 reais.

$$30\% \text{ de } (x - 2.000) = 150$$

$$0,30(x - 2.000) = 150$$

$$0,30x - 600 = 150$$

$$0,30x = 750$$

$$x = \frac{750}{0,3}$$

$$x = \frac{7.500}{3} = 2.500 \text{ reais}$$

A renda do indivíduo é de 2.500 reais.

Gabarito: C

4. (CESPE/2018/SEFAZ-RS)

Se 7 kg de feijão forem distribuídos para até quatro famílias, de modo que cada uma delas receba um número inteiro de quilos, então, nesse caso, a quantidade de maneiras distintas de se distribuírem esses 7 kg de feijão para essas famílias será igual a

- a) 30.
- b) 120.
- c) 330.
- d) 820.
- e) 1.320.

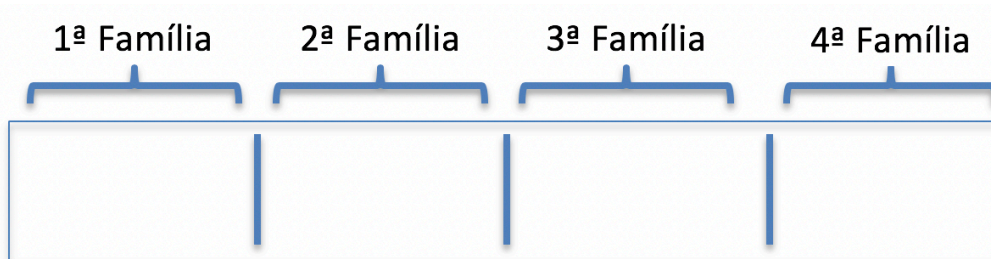
Resolução

A situação descrita no enunciado pode ser perfeitamente modelada pelo exemplo da prateleira que utilizo nas minhas aulas de Análise Combinatória.

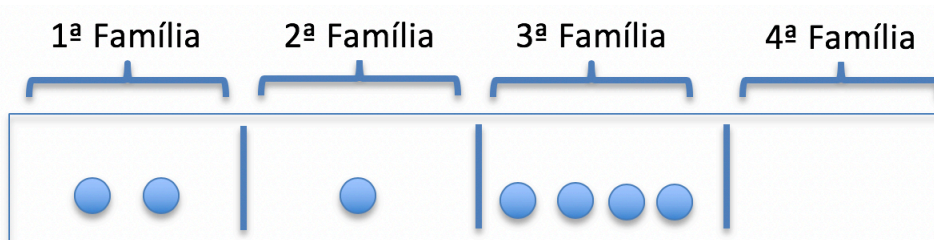
Imagine que temos 7 sacos de 1 kg de feijão. Queremos distribuí-los para ATÉ 4 famílias. Isso quer dizer que alguma família pode ficar sem feijão.

O que vamos fazer? Vamos construir uma prateleira com divisórias móveis. Nessa prateleira, teremos 3 divisórias, pois queremos distribuir os sacos de feijão entre 4 famílias.

Vou representar cada saco de feijão por uma bolinha. Observe.

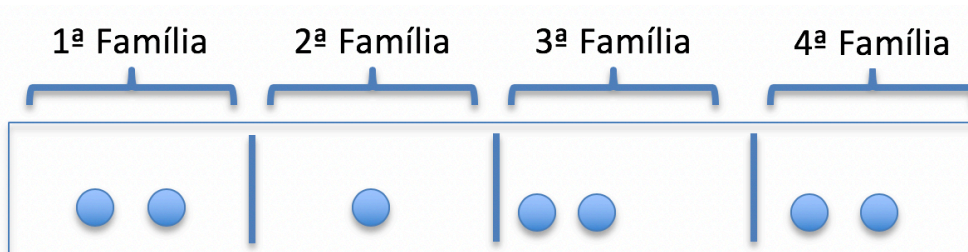


Percebeu o porquê de serem 3 divisórias? Com 3 divisórias, a prateleira fica dividida em 4 regiões. Vamos agora colocar 7 bolinhas, que correspondem aos sacos de feijão.

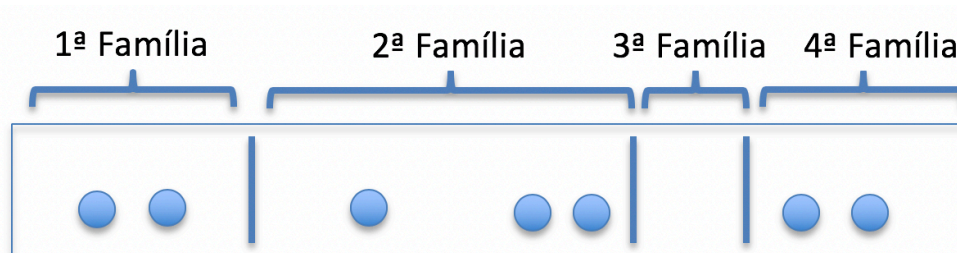


Na configuração acima, a primeira família recebeu 2kg de feijão, a segunda família recebeu 1 kg de feijão, a terceira família recebeu 4kg de feijão e a quarta família ficou sem feijão.

Para distribuir os sacos de feijão, eu posso movimentar tanto os sacos de feijão (as bolinhas) quanto as divisórias (os traços). Vou movimentar duas bolinhas, por exemplo.



Veja que eu vou movimentar agora a segunda divisória para a direita.



Assim, podemos reorganizar a distribuição dos sacos movimentando os traços ou as bolinhas.

Portanto, o total de maneiras de distribuir os 7 kg de feijão em até 4 famílias é o total de permutação de 10 objetos (7 bolinhas e 3 traços), sendo que temos repetição de 7 bolas e 3 traços.

$$P_{10}^{7,3} = \frac{10!}{7!3!} =$$
$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{720}{6} = 120$$

Ah, professor Guilherme... como eu iria pensar nisso na hora da prova?

Meu querido aluno, é por isso que as pessoas precisam estudar antes de fazer a prova do concurso. Rss... Esse tipo de raciocínio é CLÁSSICO. Todo bom curso e todo bom livro de Análise Combinatória tem obrigação de ensinar esse método.

Gabarito: B

5. (CESPE/2018/SEFAZ-RS)

Para a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a , b e c são constantes reais, tem-se que: $f(0) = 0$, $f(10) = 3$ e $f(30) = 15$. Nesse caso, $f(60)$ é igual a

- a) 18.
- b) 30.
- c) 48.
- d) 60.
- e) 108.

Resolução

Para calcular $f(0)$, basta substituir x por 0.

Como $f(0) = 0$, então vamos substituir x por 0 e igualar o resultado a 0.

$$a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0$$

$$0 + 0 + c = 0$$

$$c = 0$$

Assim, a lei de formação da função f é $f(x) = ax^2 + bx$.

Sabemos que $f(10) = 3$. Assim, vamos substituir x por 10 e igualar o resultado a 3.

$$a \cdot 10^2 + b \cdot 10 = 3$$

$$\boxed{100a + 10b = 3}$$

Equação I

Sabemos que $f(30) = 15$. Vamos substituir x por 30 e igualar o resultado a 15.

$$a \cdot 30^2 + b \cdot 30 = 15$$

$$\boxed{900a + 30b = 15}$$

Equação II

Temos um sistema de equações. Vamos multiplicar a equação I por 9 e a equação II por (-1). Dessa forma, vamos eliminar a incógnita “a”.

$$\begin{cases} 900a + 90b = 27 \\ -900a - 30b = -15 \end{cases}$$

Ao somar as duas equações do sistema, a incógnita “a” é eliminada.

$$90b - 30b = 27 - 15$$

$$60b = 12$$

$$b = \frac{12}{60}$$

$$b = \frac{1}{5}$$

Vamos substituir esse valor na equação I para calcular o valor de a .

$$100a + 10b = 3$$



$$100a + 10 \times \frac{1}{5} = 3$$

$$100a + 2 = 3$$

$$100a = 1$$

$$a = \frac{1}{100}$$

Portanto, a lei de formação da função é

$$f(x) = \frac{1}{100} \cdot x^2 + \frac{1}{5} \cdot x$$

Queremos calcular o valor de $f(60)$. Basta substituir x por 60.

$$f(60) = \frac{1}{100} \cdot 60^2 + \frac{1}{5} \cdot 60$$

$$f(60) = \frac{3.600}{100} + \frac{60}{5} = 36 + 12$$

$$f(60) = 48$$

Gabarito: C



6. (CESPE/2018/SEFAZ-RS)

Dois marceneiros e dois aprendizes, cada um trabalhando durante quatro dias, seis horas por dia, constroem três cadeiras e uma mesa. Os marceneiros trabalham com a mesma eficiência, mas a eficiência dos aprendizes é igual a 75% da eficiência dos marceneiros. Para construir uma mesa, gasta-se 50% a mais de tempo que para construir uma cadeira.

Nesse caso, para construírem doze cadeiras e duas mesas em oito dias, dois marceneiros e quatro aprendizes com eficiências iguais às daqueles citados anteriormente devem trabalhar

a) 4,2 h/dia.

b) 6 h/dia.

c) 6,3 h/dia.

d) 7 h/dia.

e) 7,5 h/dia.

Resolução

A dificuldade da questão é que temos:

i) marceneiros e aprendizes com diferentes eficiências

ii) mesas e cadeiras com tempos diferentes de produção.

Para facilitar a resolução, vamos uniformizar os dados.

Sabemos que a eficiência de um aprendiz é 75% da eficiência de um marceneiro.

$$\text{aprendiz} = 0,75 \times \text{marceneiro}$$

Na primeira situação, temos dois marceneiros e dois aprendizes.

$$2 \text{ marceneiros} + 2 \text{ aprendizes}$$

Como $\text{aprendiz} = 0,75 \times \text{marceneiro}$, temos:

$$2 \text{ marceneiros} + 2 \times \underbrace{0,75 \times \text{marceneiro}}_{\text{aprendiz}}$$

$$3,5 \text{ marceneiros}$$

Assim, vamos substituir os 2 marceneiros e 2 aprendizes por 3,5 marceneiros.

Na segunda situação, teremos 2 marceneiros e 4 aprendizes.

$$2 \text{ marceneiros} + 4 \text{ aprendizes} =$$

$$= 2 \text{ marceneiros} + 4 \times \underbrace{0,75 \times \text{marceneiro}}_{\text{aprendiz}}$$

$$= 2 \text{ marceneiros} + 3 \text{ marceneiros}$$

$$= 5 \text{ marceneiros}$$

Vamos começar a armar a nossa tabelinha da regra de três.

Marceneiros	Dias	Horas por dia	Produto
3,5	4	6	
5	8	x	

Precisamos agora simplificar os produtos (cadeiras e mesas).

Sabemos que o tempo para produzir uma mesa é 50% superior ao tempo para produzir uma cadeira. Para aumentar algo em 50%, devemos multiplicar por 1,5.

$$\text{mesa} = 1,5 \cdot \text{cadeira}$$

Na primeira situação, serão construídas 3 cadeiras e uma mesa.

$$3 \text{ cadeiras} + 1 \text{ mesa} =$$

$$= 3 \text{ cadeiras} + 1 \cdot \underbrace{1,5 \cdot \text{cadeira}}_{\text{mesa}}$$

$$= 4,5 \text{ cadeiras}$$

Na segunda situação, serão construídas 12 cadeiras e 2 mesas.

$$12 \text{ cadeiras} + 2 \text{ mesas} =$$

$$= 12 \text{ cadeiras} + 2 \cdot \underbrace{1,5 \text{ cadeira}}_{\text{mesa}}$$

$$= 12 \text{ cadeiras} + 3 \text{ cadeiras}$$

$$= 15 \text{ cadeiras}$$

Agora podemos completar nossa tabelinha.



Marceneiros	Dias	Horas por dia	Cadeiras
3,5	4	6	4,5
5	8	x	15

Bem mais simples, né? É como se o enunciado fosse assim: 3,5 marceneiros constroem 4,5 cadeiras em 4 dias trabalhando 6 horas por dia. Para construírem 15 cadeiras em 8 dias, 5 marceneiros devem trabalhar quantas horas por dia?

Vamos colocar uma setinha para baixo na coluna da grandeza desconhecida.

Marceneiros	Dias	Horas por dia	Cadeiras
3,5	4	6	4,5
5	8	x	15

Vamos agora comparar as grandezas conhecidas com a grandeza desconhecida.

Marceneiro x h/dia: A quantidade de marceneiros aumentou. Assim, cada um deles pode trabalhar menos horas por dia para manter a produtividade. Como uma grandeza aumentou e a outra diminuiu, elas são inversamente proporcionais. Setinha invertida para cima...

Marceneiros	Dias	Horas por dia	Cadeiras
3,5	4	6	4,5
5	8	x	15

Dias x h/dia: O prazo em dias aumentou. Temos mais tempo para efetuar o serviço. Assim, os marceneiros podem diminuir a quantidade de horas trabalhadas por dia para manter a produtividade. Como uma grandeza aumentou e a outra diminuiu, elas são inversamente proporcionais.

Marceneiros	Dias	Horas por dia	Cadeiras
3,5 ↑	4 ↑	6 ↓	4,5
5	8	x	15

Cadeiras x h/dia: Vamos produzir mais cadeiras. Assim, os marceneiros precisam trabalhar mais horas por dia. Como as duas grandezas aumentam, elas são diretamente proporcionais.

Marceneiros	Dias	Horas por dia	Cadeiras
3,5 ↑	4 ↑	6 ↓	4,5 ↓
5	8	x	15

Agora é só armar a proporção. De um lado da equação, colocamos a grandeza desconhecida. Do outro lado, as grandezas conhecidas. Lembre-se de respeitar os sentidos das setas.

$$\frac{6}{x} = \frac{5}{3,5} \times \frac{8}{4} \times \frac{4,5}{15}$$

$$\frac{6}{x} = \frac{180}{210}$$

$$\frac{6}{x} = \frac{18}{21}$$

Vamos simplificar a segunda fração por 3.

$$\frac{6}{x} = \frac{6}{7}$$

$$x = 7$$

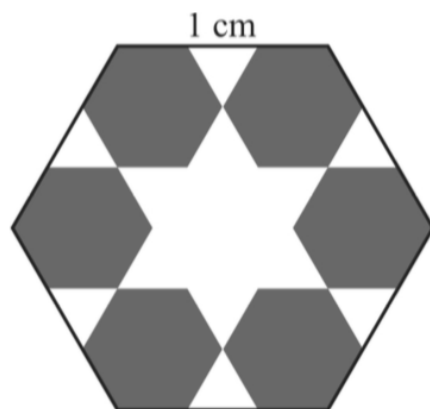
Eles devem trabalhar 7 horas por dia.

Gabarito: D



7. (CESPE 2018/SEFAZ-RS)

A figura a seguir ilustra a primeira etapa de um processo recursivo que, a partir de um hexágono regular em que os lados medem 1 cm de comprimento, constroem-se 6 novos hexágonos regulares.



Nesse processo, os lados do hexágono externo são divididos em 3 partes iguais e, conforme mostra a figura, são construídos outros 6 hexágonos regulares; em cada um deles, o comprimento dos lados é igual a $\frac{1}{3}$ cm. Na segunda etapa, dividem-se os lados desses 6 novos hexágonos em 3 partes iguais, e constroem-se, de maneira semelhante à primeira etapa, outros 36 hexágonos regulares. Esse processo pode seguir indefinidamente.

Nessa situação, sabendo-se que, se o comprimento dos lados de um hexágono regular for igual a L cm, a área desse hexágono será igual a $\frac{3\sqrt{3}}{2}L^2 \text{ cm}^2$, é correto concluir que a soma das áreas dos hexágonos obtidos na 5ª etapa do processo recursivo descrito é igual a

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^5 \times \sqrt{3} \text{ cm}^2$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \sqrt{3} \text{ cm}^2$

c) $\left(\frac{3}{2}\right)^4 \times \sqrt{3} \text{ cm}^2$

$$d) \left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$e) \left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Resolução

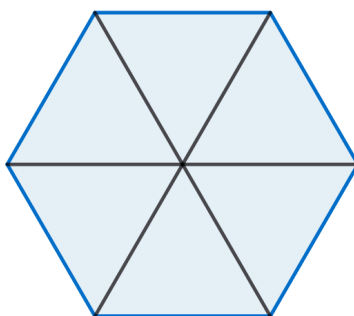
Vamos substituir L por 1 na fórmula dada no enunciado para calcular a área total do hexágono original.

$$A = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 1^2$$

$$A = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Guilherme, de onde vem essa fórmula?

É muito simples. Qualquer hexágono regular pode ser dividido em 6 triângulos equiláteros. Observe:



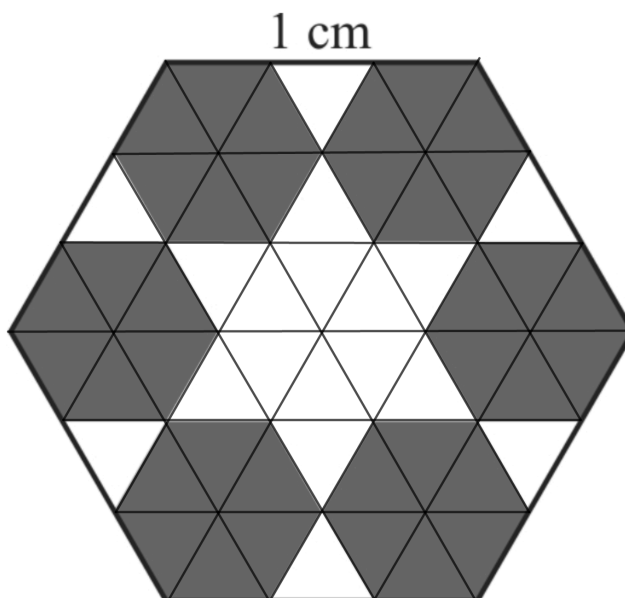
A área de um triângulo equilátero de lado L é dada por:

$$\frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

Assim, para calcular a área de um hexágono regular, basta multiplicar a fórmula acima por 6.

$$\begin{aligned} 6 \times \frac{L^2\sqrt{3}}{4} &= \\ &= \frac{3L^2\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Pois bem, vou adaptar esse raciocínio de dividir um hexágono regular em triângulos equiláteros na figura dada no problema.



Observe que o hexágono regular original foi dividido em 54 triângulos equiláteros pequenos.

Cada hexágono sombreado possui 6 triângulos equiláteros. Portanto, há $6 \times 6 = 36$ triângulos equiláteros sombreados.

Ora, como a região total possui 54 triângulos e a região sombreada possui 36 triângulos, então a região sombreada representa:

$$\frac{36}{54} = \frac{2}{3} \text{ da área original}$$

Isso quer dizer que a cada etapa do processo, teremos $2/3$ da área obtida na etapa anterior.

A área inicial é $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Área na 1ª etapa} \rightarrow \frac{2}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Área na 2ª etapa} \rightarrow \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Área na 3ª etapa} \rightarrow \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Área na 4ª etapa} \rightarrow \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Área na 5ª etapa} \rightarrow \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} \times \sqrt{3}$$

Observe que $2/3$ é cancelado com $3/2$.

$$= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \sqrt{3} =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \sqrt{3}$$

A resposta está na alternativa D.

Guilherme, se eu não tivesse a sacada de dividir o hexágono em triângulos?

Vamos lá. Vamos resolver de outra forma.

Sabemos que em cada etapa o lado do hexágono é multiplicado por $1/3$. O lado do primeiro hexágono é de 1 cm. Na quinta etapa, o lado do hexágono será:

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^5$$

A área de cada hexágono é dada por $\frac{3\sqrt{3}}{2} L^2$ (**fórmula dada no enunciado**). Portanto, a área de cada hexágono será:

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} \times \left[\underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^5}_L \right]^2$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{3^{10}}$$

Em cada etapa, o número de hexágonos é multiplicado por 6.

Assim, na quinta etapa, o número de hexágonos será:



$$\underbrace{6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6}_{5 \text{ etapas}} = 6^5$$

Assim, a área total de todos os hexágonos da 5ª etapa será a quantidade de hexágonos 6^5 multiplicada pela área de cada hexágono.

$$\begin{aligned} 6^5 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{3^{10}} &= \\ &= \left(\underbrace{2 \times 3}_6 \right)^5 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{3^{10}} \\ &= 2^5 \times 3^5 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{3^{10}} \end{aligned}$$

Temos 2^5 no numerador e 2 no denominador. Podemos simplificar e obter 2^4 .

No numerador temos $3^5 \times 3 = 3^6$. Podemos simplificar com 3^{10} no denominador e obter 3^4 no denominador.

$$\begin{aligned} &= \frac{2^4}{3^4} \times \sqrt{3} \\ &= \left(\frac{2}{3} \right)^4 \times \sqrt{3} \end{aligned}$$

Gabarito: D

8. (CESPE 2018/SEFAZ-RS)

Maria fez compras em três lojas. Em cada uma das lojas em que ela entrou, a compra feita foi paga, sem haver troco, com a quarta parte da quantia que ela tinha na bolsa ao entrar na loja. Ao sair da terceira loja, Maria tinha R\$ 270 na bolsa. Nesse caso, é correto afirmar que, ao entrar na primeira loja, Maria tinha na bolsa

- a) R\$ 1.080.
- b) R\$ 2.430.
- c) R\$ 7.290.
- d) R\$ 640.
- e) R\$ 810.



Resolução

Se Maria gasta $\frac{1}{4}$ do seu dinheiro, então ela fica com $\frac{3}{4}$.

Digamos que a quantia inicial de Maria seja de x reais.

Ao sair da primeira loja, ela fica com

$$\frac{3}{4} \text{ de } x$$

Ao sair da segunda loja, ela fica com $\frac{3}{4}$ da quantia restante anterior.

$$\frac{3}{4} \text{ de } \frac{3}{4} \text{ de } x$$

Ao sair da terceira loja, ela fica com $\frac{3}{4}$ da quantia restante anterior.

$$\frac{3}{4} \text{ de } \frac{3}{4} \text{ de } \frac{3}{4} \text{ de } x$$

Esse valor corresponde a 270 reais.

$$\frac{3}{4} \text{ de } \frac{3}{4} \text{ de } \frac{3}{4} \text{ de } x = 270$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot x = 270$$

$$\frac{27x}{64} = 270$$

$$27x = 64 \cdot 270$$

$$x = \frac{64 \cdot 270}{27} = 640 \text{ reais}$$

Gabarito: D

9. (CESPE 2018/SEFAZ-RS)

Para construir a sequência a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , de números positivos, foram dados a_1 e a_2 , e, a partir de a_3 , cada termo foi construído como sendo o produto de todos os termos anteriores. Se $a_5 < 1$, então, nessa sequência,



- a) apenas três termos são menores que 1.
- b) apenas um termo pode ser maior que 1.
- c) dois termos podem ser maiores que 1.
- d) todos os termos são, necessariamente, menores que 1.
- e) apenas dois termos são menores que 1.

Resolução

O terceiro termo é o produto dos dois termos anteriores.

$$a_3 = a_2 \cdot a_1$$

O quarto termo é o produto dos três termos anteriores.

$$a_4 = a_3 \cdot a_2 \cdot a_1$$

$$a_4 = \underbrace{a_3}_{a_2 \cdot a_1} \cdot a_2 \cdot a_1$$

$$a_4 = a_2^2 \cdot a_1^2$$

O quinto termo é o produto dos três termos anteriores.

$$a_5 = a_4 \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1$$

$$a_5 = \underbrace{a_4}_{a_2^2 \cdot a_1^2} \cdot \underbrace{a_3}_{a_2 \cdot a_1} \cdot a_2 \cdot a_1$$

$$a_5 = \underbrace{a_2^2 \cdot a_1^2}_{a_4} \cdot \underbrace{a_2 \cdot a_1}_{a_3} \cdot a_2 \cdot a_1$$

$$a_5 = a_2^4 \cdot a_1^4$$

Sabemos que o quinto termo é menor do que 1.

$$a_2^4 \cdot a_1^4 < 1$$

Como esses os números da sequência são positivos, vamos calcular a raiz quarta nos dois lados da inequação.

$$\sqrt[4]{a_2^4 \cdot a_1^4} < \sqrt[4]{1}$$

$$a_2 \cdot a_1 < 1$$

Para que o produto $a_2 \cdot a_1$ seja menor do que 1, pelo menos um dos fatores precisa ser menor que 1. Se os dois fossem maiores do que 1, o produto seria maior do que 1.

É importante notar que se x é um número entre 0 e 1, então suas potências de expoentes maiores que 2 serão menores que x .

Observe, por exemplo que $0,1^2 = 0,01$ e $0,1^3 = 0,001$.

Assim, já sabemos que dentre a_1 e a_2 temos pelos menos um menor que 1.

Sabemos que $a_3 = a_2 \cdot a_1$. Como $a_2 \cdot a_1 < 1$, então $a_3 < 1$.

Sabemos que $a_4 = a_2^2 \cdot a_1^2 = (a_2 \cdot a_1)^2$. Como $a_2 \cdot a_1 < 1$, então seu quadrado também será menor que 1, pois ao elevar um número menor que 1 ao quadrado, o resultado diminui. Portanto, $a_4 < 1$.

Da mesma forma, sabemos que $a_5 = a_2^4 \cdot a_1^4 = (a_2 \cdot a_1)^4$. Como $a_2 \cdot a_1 < 1$, então sua quarta potência também será menor que 1, pois ao elevar um número menor que 1 à quarta potência, o resultado diminui. Portanto, $a_5 < 1$.

Assim, temos que

$$\begin{aligned}a_3 &< 1 \\a_4 &< 1 \\a_5 &< 1\end{aligned}$$

Ademais, dentre a_1 e a_2 temos pelos menos um menor que 1.

Portanto, dentre os 5 termos da sequência, apenas um pode ser maior que 1.

Gabarito: B

10. (CESPE 2018/SEFAZ-RS)

Um casal tem 4 filhos: Fábio, Dirceu, Alberto e Aldo. Fábio é o mais velho. Dirceu é 4 anos mais novo que Fábio. Alberto e Aldo são gêmeos e nasceram 4 anos depois de Dirceu. Todos fazem aniversário no mês de junho. Em 2020, depois dos aniversários, a soma das idades dos filhos será 40 anos.

Nesse caso, a respeito das idades desses filhos, assinale a opção **correta**.

- a) Dirceu nasceu em 2010.
- b) Alberto e Aldo nasceram antes de 2012
- c) Fábio nasceu em 2005.

d) Em julho de 2020, a soma das idades de Fábio e Dirceu será superior a 30 anos.

e) Em junho de 2018, Alberto e Aldo completaram 7 anos de idade.

Resolução

Seja x a idade de Alberto e Aldo (gêmeos) no ano de 2020.

Dirceu é 4 anos mais velho que eles. Portanto, Dirceu tem $x + 4$ anos em 2020.

Fábio é 4 anos mais velho que Dirceu. Portanto, Fábio tem $x + 4 + 4 = x + 8$ anos em 2020.

A soma das idades em 2020 é igual a 40 anos.

$$\underbrace{\text{Alberto}}_x + \underbrace{\text{Aldo}}_x + \underbrace{\text{Dirceu}}_{x+4} + \underbrace{\text{Fábio}}_{x+8} = 40$$

$$x + x + x + 4 + x + 8 = 40$$

$$4x + 12 = 40$$

$$4x = 28$$

$$x = 7$$

Vamos analisar cada uma das alternativas.

a) Dirceu nasceu em 2010. (Falso)

Justificativa: Dirceu tem $x + 4 = 7 + 4 = 11$ anos em 2020. Ele nasceu em $2020 - 11 = 2009$.

b) Alberto e Aldo nasceram antes de 2012. (Falso).

Justificativa: Eles têm 7 anos em 2020. Eles nasceram em $2020 - 7 = 2013$.

c) Fábio nasceu em 2005. (Verdadeiro)

Justificativa: Fábio tem $x + 8 = 7 + 8 = 15$ anos em 2020. Ele nasceu em $2020 - 15 = 2005$.

d) Em julho de 2020, a soma das idades de Fábio e Dirceu será superior a 30 anos. (Falso)

Justificativa: Em 2020, Fábio tem $x + 8 = 7 + 8 = 15$ anos e Dirceu tem $x + 4 = 7 + 4 = 11$ anos. A soma das idades deles em julho de 2020 é $15 + 11 = 26$.

e) Em junho de 2018, Alberto e Aldo completaram 7 anos de idade. (Falso).

Justificativa: Eles completaram 7 anos em 2020.



Gabarito: C

11. (CESPE 2018/SEFAZ-RS)

O professor de matemática de uma turma escreveu no quadro uma soma de três parcelas. Cada parcela era de três algarismos. Descuidadamente, um aluno apagou cinco algarismos. O professor, tentando recuperar a expressão original, escreveu, no lugar desses algarismos apagados, as letras T , W , X , Y e Z , como mostrado a seguir.

$$\begin{array}{r} 245 \\ Y9Z \\ 26W \\ \hline T2X0 \end{array} +$$

Considerando-se que o número XZ , em que Z é o algarismo da unidade e X é o algarismo da dezena, é maior que 9, então a soma $T + W + X + Y + Z$ é igual a

- a) 12.
- b) 15.
- c) 21.
- d) 23.
- e) 31

Resolução

Como o número XZ é maior do que 9, então X não pode ser 0.

Vamos melhorar a qualidade da “figura” dada na prova.

$$\begin{array}{r} 2 \quad 4 \quad 5 \\ Y \quad 9 \quad Z \\ 2 \quad 6 \quad W \\ \hline T \quad 2 \quad X \quad 0 \end{array} +$$

Observe a coluna das unidades. Ao somar $5 + Z + W$, o resultado será 10 ou 20, para que o algarismo das unidades seja 0.

Vamos testar a primeira possibilidade. Será que $5 + Z + W = 10$? Nesse caso, “subirá” 1 para a coluna das dezenas.



$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 2 \\
 Y \\
 2
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 1 \\
 4 \\
 9 \\
 6
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 5 \\
 Z \\
 W
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{r}
 \hline
 T \quad 2 \quad X \quad 0
 \end{array}$$

Assim, na coluna das dezenas, teremos $1 + 4 + 9 + 6 = 20$. Portanto, $X = 0$ e deveremos “subir” 2 para a coluna das centenas.

Opa!! Chegamos em um absurdo, pois sabemos que X não pode ser zero (observe o início da resolução).

Assim, concluímos que $5 + Z + W$ não pode ser 10. Portanto, $5 + Z + W = 20$.

Dessa forma, $Z + W = 15$ e deveremos subir 2 para a coluna das dezenas.

Ao subir 2 para a coluna das dezenas, teremos $2 + 4 + 9 + 6 = 21$. Portanto, $X = 1$ e deveremos subir 2 para a coluna das centenas.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 2 \\
 Y \\
 2
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 2 \\
 4 \\
 9 \\
 6
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 5 \\
 Z \\
 W
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{r}
 \hline
 T \quad 2 \quad 1 \quad 0
 \end{array}$$

Observe agora a coluna das centenas. Temos $2 + 2 + Y + 2$. Esse resultado termina em 2. Portanto, $2 + 2 + Y + 2$ só pode ser 12 ou 22. Ora, para que $2 + 2 + Y + 2$ fosse 22, deveríamos ter $Y = 16$, o que é um absurdo, pois Y é um algarismo e não um número de dois dígitos.

Portanto, $2 + 2 + Y + 2 = 12$ e, conseqüentemente, $Y = 6$.

Dessa forma, deveremos subir 1 para a coluna da unidade de milhar e, portanto, $T = 1$.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 1 \\
 6 \\
 2
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 2 \\
 2 \\
 9 \\
 6
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 2 \\
 4 \\
 Z \\
 W
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{r}
 \hline
 1 \quad 2 \quad 1 \quad 0
 \end{array}$$

Conclusões: $T = 1, X = 1, Y = 6$ e $Z + W = 15$.

Portanto,

$$T + W + X + Y + Z =$$

$$= T + X + Y + Z + W$$

$$= 1 + 1 + 6 + 15$$

$$= 23$$

Gabarito: D

12. (CESPE 2018/SEFAZ-RS)

Para a , b e c , números reais, positivos e distintos, são verdadeiras as seguintes propriedades:

- $a < c$
- $b < \frac{a+c}{2} < \sqrt{bc}$

A partir dessas propriedades, é correto concluir que

- a) $\frac{a+c}{2} < \frac{a+b+c}{3}$
- b) $a > b$
- c) $c < \frac{a+b}{2}$
- d) $a < b < c$
- e) $b > c$

Resolução

O edital do concurso para SEFAZ-RS não incluiu conhecimentos sobre médias (aritmética e geométrica).

Assim, vou resolver primeiro atribuindo valores às variáveis reais positivas a , b e c .

Como temos $\sqrt{bc}$, vou colocar $b = 16$ e $c = 25$. Dessa forma, $\sqrt{bc} = \sqrt{16 \times 25} = \sqrt{400} = 20$.

Eu utilizei os valores 16 e 25 para que a raiz quadrada fosse inteira.



Assim, temos que

$$a < c$$

$$a < 25$$

Temos ainda que

$$b < \frac{a+c}{2} < \sqrt{bc}$$

$$16 < \frac{a+25}{2} < 20$$

Vamos multiplicar todos os termos por 2.

$$32 < a + 25 < 40$$

Vamos agora subtrair 25 de todos os termos.

$$7 < a < 15$$

Vamos pegar um número qualquer nesse intervalo. Digamos que $a = 10$.

Assim, vamos assumir que $a = 10$, $b = 16$ e $c = 25$.

Esses números satisfazem as condições impostas pelo enunciado.

Vamos agora testar as alternativas.

$$\text{a) } \frac{a+c}{2} < \frac{a+b+c}{3}$$

$$\frac{10+25}{2} < \frac{10+16+25}{3}$$

$$17,5 < 17 \text{ (falso)}$$

$$\text{b) } a > b$$

$$10 > 16 \text{ (falso)}$$



c) $c < \frac{a+b}{2}$

$$25 < \frac{10 + 16}{2}$$

$$25 < 13 \text{ (falso)}$$

d) $a < b < c$

$$10 < 16 < 25 \text{ (verdadeiro)}$$

e) $b > c$

$$16 > 25 \text{ (falso)}$$

A resposta é a alternativa D.

Vamos agora resolver utilizando conhecimentos sobre média aritmética e média geométrica. Começemos com um resuminho teórico.

Considere que temos uma lista de n números positivos $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Para calcular a média aritmética $\overline{x}$ entre esses n números, devemos somá-los e dividir o resultado por n .

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

A média geométrica destes números é dada por:

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

Assim, se forem 2 números apenas, calcularemos a raiz quadrada do produto dos números para calcular a média geométrica. Se forem 3 números, calcularemos a raiz cúbica, e assim por diante.

Se os números forem todos iguais, as médias serão iguais aos próprios números.

Se pelo menos um número é diferente dos demais, as médias são superiores ao menor dos números e inferiores ao maior dos números.

Exemplo: Calcular a média geométrica dos números 6, 8 e 36.

Resolução

Como são três números, devemos calcular a raiz cúbica do produto dos três números.

$$G = \sqrt[3]{6 \cdot 8 \cdot 36}$$

A melhor maneira para calcular a raiz cúbica é fatorar os números.

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Deixe-me explicar o processo de fatoração. Tomemos, por exemplo, o número 36. Perceba que 36 é divisível por 2. O primeiro passo, portanto, é dividir 36 por 2. O resultado é 18.

Então, você percebe que 18 também é divisível por 2 e o resultado da divisão é 9. O número 9 não é divisível por 2, mas é divisível por 3. Você efetua então a divisão de 9 por 3 e chega ao número 3. Finalmente, 3 é divisível por 3 e acaba a fatoração.

Desta forma, temos que $6 = 2^1 \cdot 3^1$, $8 = 2^3$ e $36 = 2^2 \cdot 3^2$.

Ficamos com:

$$G = \sqrt[3]{6 \cdot 8 \cdot 36}$$

$$G = \sqrt[3]{2^1 \cdot 3^1 \cdot 2^3 \cdot 2^2 \cdot 3^2}$$

Para multiplicar potências de mesma base, repetimos base e somamos os expoentes. Assim, $2^1 \cdot 2^3 \cdot 2^2 = 2^{1+3+2} = 2^6$ e $3^1 \cdot 3^2 = 3^{1+2} = 3^3$. Ficamos com:

$$G = \sqrt[3]{2^6 \cdot 3^3}$$

Como a raiz é cúbica, devemos dividir cada expoente por 3. Se a raiz fosse quadrada, bastaria dividir cada expoente por 2, e assim por diante.



$$G = 2^{6/3} \cdot 3^{3/3}$$

$$G = 2^2 \cdot 3^1 = 4 \cdot 3 = 12$$

A média geométrica dos números 6, 8 e 36 é 12.

Uma propriedade interessante diz que a média geométrica é sempre menor do que ou igual à média aritmética.

Considere uma lista de números positivos $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Se $\overline{x}$ é a média aritmética e G é a média geométrica, então $\overline{x} \geq G$. A igualdade ocorre quando todos os números da lista são iguais.

Em outras palavras, se pelo menos um número da lista é diferente dos demais, a média aritmética será SEMPRE maior que a média geométrica. Se todos os números forem iguais, então as médias serão iguais.

Tomemos como exemplo os números 2 e 18.

A média aritmética é

$$\overline{x} = \frac{2 + 18}{2} = 10$$

A média geométrica é

$$G = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6$$

Como era de se esperar, a média aritmética é maior que a média geométrica.

Observe ainda que a média aritmética e a média geométrica dos números 4, 4 e 4 são iguais a 4.

$$\overline{x} = \frac{4 + 4 + 4}{3} = 4$$

$$G = \sqrt[3]{4 \cdot 4 \cdot 4} = \sqrt[3]{4^3} = 4$$

Vamos agora voltar à questão.

Para a , b e c , números reais, positivos e distintos, são verdadeiras as seguintes propriedades:

- $a < c$
- $b < \frac{a+c}{2} < \sqrt{bc}$

A partir dessas propriedades, é correto concluir que

a) $\frac{a+c}{2} < \frac{a+b+c}{3}$

b) $a > b$

c) $c < \frac{a+b}{2}$

d) $a < b < c$

e) $b > c$

Resolução

Já sabemos que $a < c$.

A segunda desigualdade nos informa que $b < \sqrt{bc}$.

Em outras palavras, b é menor do que a média geométrica entre b e c . Como a média sempre fica entre os números, podemos concluir que $b < c$.

Precisamos agora saber a relação entre a e b .

A segunda desigualdade nos informou que $\frac{a+c}{2} < \sqrt{bc}$.

Ora, $\frac{a+c}{2}$ representa a média aritmética entre os números a e c . Sabemos que a média aritmética de números distintos é sempre maior do que a média geométrica. Portanto,

$$\underbrace{\sqrt{ac}}_{\text{média geométrica entre } a \text{ e } c} < \underbrace{\frac{a+c}{2}}_{\text{média aritmética entre } a \text{ e } c} < \sqrt{bc}$$

Juntando o pé com a cabeça, temos:

$$\sqrt{ac} < \sqrt{bc}$$

$$\sqrt{a} < \sqrt{b}$$

$$a < b$$

Assim, $a < b$ e $b < c$. Portanto, $a < b < c$. A resposta está na alternativa D.

Vamos agora analisar as outras alternativas.

a) $\frac{a+c}{2} < \frac{a+b+c}{3}$



Sabemos que $b < \frac{a+c}{2}$, ou seja, b é menor do que a média entre a e c . Assim, se formos incluir b no cálculo da média, o resultado da média diminuirá. Portanto, a alternativa A está errada.

b) $a > b$

Falso, pois $a < b$.

c) $c < \frac{a+b}{2}$

Falso, pois c é o maior de todos e, portanto, também será maior que a média dos dois menores.

e) $b > c$

Falso, pois $b < c$.

Gabarito: D

13. (CESPE/2018/SEFAZ-RS)

Em determinado dia, os órgãos responsáveis atenderam 50 contribuintes para resolver pendências relativas ao IPTU, ao IPVA e a outros tributos. Sabe-se que foram atendidos:

- 18 contribuintes com pendências de IPTU;
- 23 contribuintes com pendências de IPVA;
- 8 contribuintes com pendências de IPTU e IPVA.

Nesse caso, a quantidade de contribuintes atendidos cujas pendências não se referiam a IPTU nem a IPVA foi igual a

- a) 9.
- b) 10.
- c) 15.
- d) 17.
- e) 25.

Resolução

Podemos rapidamente utilizar o princípio da inclusão-exclusão para determinar a quantidade de contribuintes que possuem pendências de IPTU ou IPVA.

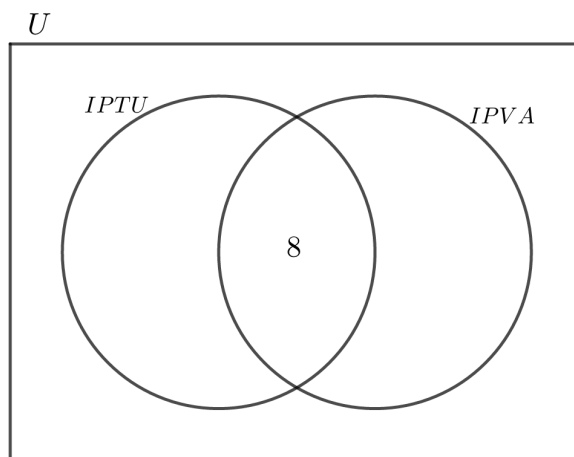
$$n(\text{IPTU ou IPVA}) = n(\text{IPTU}) + n(\text{IPVA}) - n(\text{IPTU e IPVA})$$

$$n(\text{IPTU ou IPVA}) = 18 + 23 - 8$$

$$n(\text{IPTU ou IPVA}) = 33$$

Portanto, 33 contribuintes foram atendidos para resolver pendências de IPTU ou de IPVA. A quantidade de pessoas que foram atendidas por outros motivos é igual a $50 - 33 = 17$.

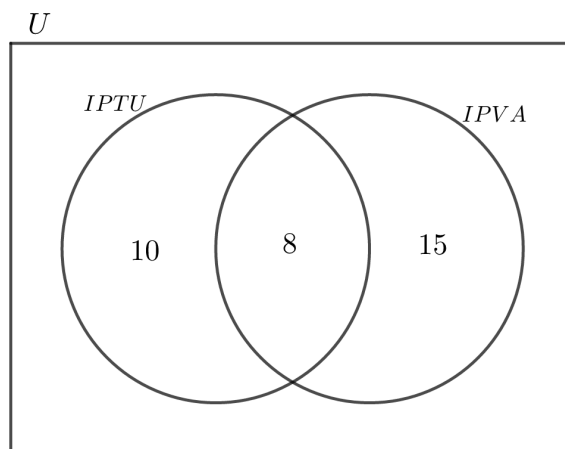
Poderíamos também ter resolvido com diagramas.



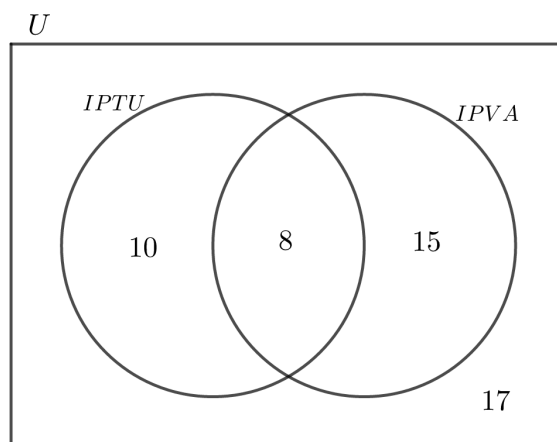
Sabemos também que:

- 18 contribuintes com pendências de IPTU;
- 23 contribuintes com pendências de IPVA;

Portanto, $18 - 8 = 10$ pessoas foram atendidas para resolver pendências apenas sobre IPTU e $23 - 8 = 15$ pessoas foram resolver apenas pendências sobre IPVA.



Já temos $10 + 8 + 15 = 33$ pessoas no diagrama. Como o total de pessoas é 50, então ainda faltam $50 - 33 = 17$ pessoas, que correspondem às pessoas que foram resolver outras pendências.



Gabarito: D

14. (CESPE/2018/SEFAZ-RS)

Os ponteiros de dois relógios foram ajustados em determinado dia, às 12 h 0 min, de acordo com o horário oficial de Brasília. Após esse ajuste, a cada dia, um dos relógios atrasava 2 minutos, e o outro adiantava 1,6 minuto, ambos em relação ao horário oficial. Caso esses relógios não sejam reajustados, seus ponteiros voltarão a marcar 12 h 0 min no mesmo instante em

- a) 60 dias.
- b) 400 dias.
- c) 720 dias.
- d) 900 dias.
- e) 3.600 dias.

Resolução

Resolução

Uma maneira rápida é usar a Técnica Milenar do Chute. Vamos testar as alternativas.

- a) 60 dias.

O primeiro relógio atrasa 2 minutos por dia. Em 60 dias, ele estará atrasado em $2 \times 60 = 120$ minutos = 2 horas. Portanto, daqui a exatamente 60 dias, o relógio não estará marcando 12h. Ele estará marcando $12h - 2h = 10h$.



b) 400 dias.

O primeiro relógio atrasa 2 minutos por dia. Em 400 dias, ele estará atrasado em $400 \times 2 = 800$ minutos = 13 horas e 20 minutos. Portanto, o relógio não estará marcando exatamente 12h.

c) 720 dias.

O primeiro relógio atrasa 2 minutos por dia. Em 720 dias, ele estará atrasado em $2 \times 720 = 1.440$ minutos = 24 horas.

Se o relógio fosse normal, ele estaria marcando 12h, mas ele atrasou 24 horas, que correspondem a duas voltas completas do relógio. Assim, o primeiro relógio estará marcando 12h do dia anterior.

O segundo relógio adianta 1,6 min por dia. Em 720 dias, ele adiantará 1.152 minutos = 19h 12min. Portanto, o segundo relógio, daqui a 720 dias, não estará marcando exatamente 12h, pois ele estará adiantado 19h12min, que não é um número inteiro de voltas do relógio.

d) 900 dias.

O primeiro relógio atrasa 2 minutos por dia. Em 900 dias, ele atrasará $2 \times 900 = 1.800$ minutos = 30 horas.

Se o relógio fosse normal, ele estaria marcando exatamente 12h. Entretanto, como ele é defeituoso, ele estará 30h atrasado. Voltando 24h, ele estaria novamente marcando 12h. Atrasando mais 6 horas (para completar as 30 horas de atraso), o ponteiro estaria marcando $12h - 6h = 6h$.

Portanto, o relógio não estaria marcando 12h.

e) 3.600 dias.

O primeiro relógio atrasa 2 minutos por dia. Daqui a 3.600 dias, ele atrasará $2 \times 3.600 = 7.200$ minutos = 120 horas. Como o relógio faz um ciclo a cada 12 horas, então ele estaria exatamente $120/12 = 10$ voltas atrasado. Portanto, daqui a 3.600 dias, o relógio estaria marcando exatamente 12h, só que 10 voltas atrasado em relação ao horário oficial.

O segundo relógio adianta 1,6 minutos por dia. Em 3.600 dias, ele adiantará $1,6 \times 3.600 = 5.760$ minutos = 96 horas. Como o relógio faz um ciclo a cada 12 horas, ele estaria exatamente $96/12 = 8$ voltas adiantado. Portanto, daqui a 3.600 dia, o segundo relógio estaria marcando 12h, só que 8 voltas adiantado em relação ao horário oficial.

Gabarito: E

Observe que o raciocínio acima nos guia para uma solução geral. Para que o relógio esteja marcando exatamente 12h após x dias, ele deverá atrasar ou adiantar um múltiplo inteiro de 12 horas = 720 minutos.



O primeiro relógio atrasa 2 minutos por dia. Ele atrasará 720 minutos a cada $720/2 = 360$ dias.

O segundo relógio adianta 1,6 minutos por dia. Ele adiantará 720 minutos a cada $720/1,6 = 450$ dias.

Para calcular quando os dois relógios atrasarão ou adiantarão um número inteiro de voltas, deveremos calcular $\text{mmc}(360, 450)$.

360, 450 10

36, 45 9

4, 5 5

4, 1 4

1, 1

Portanto, $\text{mmc}(360, 450) = 10 \times 9 \times 5 \times 4 = 1.800$ dias.

Isso quer dizer que os relógios marcarão 12h juntos a cada 1.800 dias.

A resposta será qualquer múltiplo de 1.800. Dentre as alternativas, o único múltiplo de 1.800 é 3.600, que corresponde à segunda coincidência dos relógios às 12h.

Gabarito: E
