Olá, queridos alunos!!

Tudo bem?

Aqui quem vos fala é o professor Guilherme Neves.

Vamos fazer uma super-revisão de Matemática para o concurso do BNB, que ocorrerá no dia 2 de Dezembro.

Aproveito o ensejo para convidá-los a seguir o meu perfil no instagram **@profguilhermeneves** e acompanhar dicas e questões resolvidas diariamente.

Sem mais delongas, vamos começar!!

1. PORCENTAGEM

As razões de denominador 100 são chamadas taxas percentuais, razões centesimais, percentagem ou porcentagem.

$$\frac{p}{100} = p\%$$

Podemos expressar as porcentagens sob a forma decimal (taxa unitária). Para obter a taxa unitária, basta dividir o numerador por 100.

$$80\% = \frac{80}{100} = 0{,}8$$

$$47\% = \frac{47}{100} = 0{,}47$$

- Para calcular x% de um valor, basta multiplicar o valor pelo número x/100.

Exemplo: Calcular 30% de 500.

Resolução

$$30\%\ de\ 500 = \frac{30}{100} \cdot 500 = 150$$

- Para transformar uma fração ordinária ou um número qualquer em taxa percentual, basta multiplicá-la por 100%.

Exemplo: Transformar a fração 3/8 em taxa percentual.

Resolução

$$\frac{3}{8} = \frac{3}{8} \cdot 100\% = \frac{300}{8}\% = 37{,}5\%$$

- É comum querermos saber qual é a participação percentual de uma parte do todo. Por exemplo, imagine que em um grupo de 300 pessoas, 120 são homens. Como calculamos a participação percentual dos homens? Ora, basta dividir a "parte" pelo "todo". E para transformar o resultado em porcentagem, devemos multiplicar o resultado por 100%.

$$\frac{120}{300} \cdot 100\% = 40\%$$

Isto significa que 40% das 300 pessoas são homens.

- Outro importante tópico em porcentagem é o cálculo da variação percentual. Por exemplo, um produto custava R$ 1.200,00 e passou a custar R$ 1.500,00. Qual foi a variação percentual?

Sejam $V_{inicial} = 1.200{,}00$ e $V_{final} = 1.500{,}00$.

Para calcular a variação percentual, basta utilizar a seguinte fórmula:

$$i = \frac{V_{final} - V_{inicial}}{V_{inicial}} \cdot 100\% = \frac{1.500 - 1.200}{1.200} = \frac{300}{1.200} \cdot 100\% = 25\%$$

Esta mesma fórmula pode ser usada para calcular a variação percentual em casos de desconto.

- Finalmente, é crucial saber calcular variações percentuais sucessivas.

Se um valor aumenta $i = p\%$, devemos multiplicar por $(1 + i)$.

Se um valor diminui $i = p\%$, devemos multiplicar por $(1 - i)$.

Assim, se uma mercadoria custa 200 reais e sofre um aumento de 30% e um desconto de 20%, ela passa a custar

$$200 \cdot (1 + 0{,}3) \cdot (1 - 0{,}2) = 200 \cdot 1{,}3 \cdot 0{,}8 = 208$$

2. Regra de Três

- Coloque no cabeçalho da tabela as grandezas.
- Na primeira linha, coloque os valores das grandezas na situação em que todas são conhecidas.
- Na segunda linha, coloque os valores das grandezas na situação em que uma das grandezas é desconhecida.
- Coloque uma seta para baixo na coluna da grandeza desconhecida (onde tem o "x").
- Compare as grandezas conhecidas com a grandeza desconhecida.
- Se as duas grandezas aumentam ou se as duas diminuem, as grandezas são diretamente proporcionais e a seta fica voltada para baixo.
- Se uma grandeza aumenta enquanto a outra diminui, as grandezas são inversamente proporcionais e a seta fica voltada para cima.
- Montar a proporção e resolver a equação.
- Marcar o gabarito e correr pro abraço.

Exemplo

Um grupo de 8 funcionários analisou 32 propostas de reestruturação de um determinado setor de uma empresa em 16 horas de trabalho. Para analisar 48 dessas propostas, em 12 horas de trabalho, um outro grupo de funcionários, em igualdade de condições do grupo anterior, deverá ser composto por um número de pessoas igual a

(A) 18. (B) 12. (C) 16. (D) 14. (E) 20

Resolução

Vamos montar uma tabela para comparar as grandezas.

Funcionários	Propostas	Horas de trabalho
8 ↓	32 ↓	16 ↑
x	48	12

Como a quantidade de propostas aumentou, aumentará também a quantidade de funcionários. As grandezas são diretamente proporcionais (seta voltada para baixo)

Como o tempo diminuiu, vamos precisar de mais funcionários. Como uma grandeza diminui enquanto a outra aumenta, elas são inversamente proporcionais (seta voltada para cima)

$$\frac{8}{x} = \frac{32}{48} \cdot \frac{12}{16}$$

A fração 32/48 pode ser simplificada por 16 e a fração 12/16 pode ser simplificada por 4.

$$\frac{8}{x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$$

Podemos cortar 3 com 3. Finalmente 2/4 = 1/2. Assim,

$$\frac{8}{x} = \frac{1}{2}$$

$$x = 2 \cdot 8 = 16$$

Gabarito: C

---

3. Razão e Proporção

Neste tópico, é fundamental saber resolver questões que envolvam divisão proporcional. Vejamos através de um exemplo como funciona este assunto.

> Uma gratificação de R$ 5.280,00 será dividida entre três funcionários de uma empresa na razão direta do número de filhos e na razão inversa das idades de cada um. André tem 30 anos e possui 2 filhos; Bruno com 36 anos tem 3 filhos e Carlos tem 48 anos e 6 filhos. Quanto receberá cada filho?

Vamos dividir R$ 5.280 em três partes. Sejam $a, b\ e\ c$ essas três partes. A soma dessas três partes é R$ 5.280,00. Portanto:

$$a + b + c = 5.280$$

O objetivo é calcular cada uma das partes $a, b\ e\ c$. É agora que entra a tal "constante de proporcionalidade".

$$constante\ de\ proporcionalidade = k$$

Cada parte será igual a um número multiplicado pela constante k.

O enunciado afirma que cada parte será diretamente proporcional ao número de filhos e inversamente proporcional às idades de cada um.

Lembre-se sempre:

- Diretamente proporcional → multiplica a constante k
- Inversamente proporcional → divide a constante k

No nosso exemplo, o número de filhos multiplicará a constante (porque é diretamente proporcional) e a idade dividirá a constante (porque é inversamente proporcional).

André, por exemplo, tem 2 filhos e possui 30 anos de idade. Portanto,

$$a = \frac{2k}{30} = \frac{k}{15}$$

Bruno tem 3 filhos e 36 anos. Portanto,

$$b = \frac{3k}{36} = \frac{k}{12}$$

Carlos tem 6 filhos e 48 anos. Portanto,

$$c = \frac{6k}{48} = \frac{k}{8}$$

A soma das três partes é 5.280. Logo,

$$a + b + c = 5.280$$

$$\frac{k}{15} + \frac{k}{12} + \frac{k}{8} = 5.280$$

$$\frac{8k + 10k + 15k}{120} = 5.280 \Leftrightarrow \frac{33k}{120} = 5.280$$

$$33k = 5.280 \cdot 120 \Leftrightarrow k = 19.200$$

Assim, podemos calcular as três partes:

$$a = \frac{k}{15} = \frac{19.200}{15} = 1.280$$
$$b = \frac{k}{12} = \frac{19.200}{12} = 1.600$$
$$c = \frac{k}{8} = \frac{19.200}{8} = 2.400$$

4. MÉDIA ARITMÉTICA SIMPLES E PONDERADA

Para calcular a média aritmética, basta somar todos os elementos e dividir pela quantidade de elementos.

$$\boxed{\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}}$$

Um macete muito legal para resolver questões de média aritmética é o seguinte:

Se é dada a média de um conjunto, basta multiplicar a média pela quantidade de termos para calcular a soma total. Por exemplo, se a média salarial de 8 pessoas é de 1.500 reais, então, juntos, eles recebem 8 x 1.500 = 12.000 reais.

Isto é decorrente da própria definição de média aritmética.

$$\overline{x} = \frac{Soma}{n} \Leftrightarrow Soma = n \cdot \overline{x}$$

FIQUE ATENTO!

> Se um problema simplesmente pedir para calcular a média sem especificar qual o tipo de média, você deverá calcular a média aritmética.

HORA DE PRATICAR!

(CESPE 2016/FUNPRESP)

adesão ao plano	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0
salário (em R$)	5.000	8.000	4.000	6.000	2.000	3.000	4.000	4.000	4.500	7.000

Considerando que os dados na tabela mostram salários de diferentes servidores que aderiram (1) ou não aderiram (0) a determinado plano de previdência complementar, julgue o item subsecutivo.

A média dos salários do grupo que aderiu ao plano de previdência complementar é menor que a do que não aderiu ao plano.

Comentários:

Temos duas listas de números: uma formada pelos salários dos servidores que aderiram ao plano de previdência complementar e outra formada pelos salários dos servidores que não aderiram ao plano.

Os servidores que aderiram ao plano estão indicados pelo número 1 e os servidores que não aderiram estão indicados pelo número 0.

Queremos calcular a média. Como não foi especificada a média, deveremos trabalhar com a média aritmética.

Para tanto, basta somar os elementos correspondentes a cada grupo e dividir pela quantidade de elementos do grupo.

Salários dos servidores que aderiram ao plano: 5.000, 8.000, 6.000, 4.000, 4.500. São cinco os servidores que aderiram ao plano. A média destes salários é:

$$\overline{x_1} = \frac{5.000 + 8.000 + 6.000 + 4.000 + 4.500}{5} = \frac{27.500}{5} = 5.500$$

Salários dos servidores que não aderiram ao plano: 4.000, 2.000, 3.000, 4.000, 7.000. São cinco os servidores que não aderiram ao plano. A média destes salários é:

$$\overline{x_2} = \frac{4.000 + 2.000 + 3.000 + 4.000 + 7.000}{5} = \frac{20.000}{5} = 4.000$$

A média dos salários dos servidores que aderiram ao plano é MAIOR do que a média dos salários dos servidores que não aderiram ao plano.

Gabarito: Errado

Imagine que um estudante realizou 4 provas e obteve as seguintes notas: 8; 9,5; 7,5 e 9. A sua média é

$$\overline{x} = \frac{8 + 9{,}5 + 7{,}5 + 9}{4} = \frac{34}{4} = 8{,}5$$

Até aí tudo ok. Usamos a média aritmética simples quando todos os valores da lista têm a mesma “importância”.

Vamos supor agora que o estudante prestou vestibular para Engenharia e realizou provas de Matemática, Física, Química, História e Biologia.

Ora, como o estudante está concorrendo a uma vaga no curso de Engenharia, é esperado que matérias de exatas tenham um **<u>peso</u>** maior (uma importância maior). É aqui que entra o conceito da média ponderada.

Vamos assumir que o peso de Matemática seja 4, de Física seja 5, de Química seja 3, de História seja 1 e de Biologia seja 2. Suponha ainda que o estudante obteve as seguintes notas:

Matéria	Nota (x_i)	Peso (p_i)
Matemática	9,5	4
Física	8,5	5
Química	7	3
História	5	1
Biologia	4	2

Para calcular a média aritmética ponderada (em que levamos em consideração os pesos de cada matéria), devemos multiplicar cada nota pelo seu respectivo peso, somar tudo e dividir pela soma dos pesos.

Matéria	Nota (x_i)	Peso (p_i)	Nota x Peso
Matemática	9,5	4	9,5 x 4 = 38
Física	8,5	5	8,5 x 5 = 42,5
Química	7	3	7 x 3 = 21
História	5	1	5 x 1 = 5
Biologia	4	2	4 x 2 = 8

$$\overline{x} = \frac{38 + 42,5 + 21 + 5 + 8}{4 + 5 + 3 + 1 + 2} = \frac{114,5}{15} \cong 7,63$$

Vamos generalizar. Se temos uma lista de números $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ com pesos respectivos $(p_1, p_2, \dots, p_n)$, então a média aritmética ponderada é dada por:

$$\boxed{\overline{x} = \frac{x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}}$$

HORA DE
PRATICAR!

(CESPE 2015/TELEBRAS/Técnico em Gestão de Telecomunicações) A equipe de atendentes de um serviço de telemarketing é constituída por 30 empregados, divididos em 3 grupos, que trabalham de acordo com a seguinte escala.

- Grupo I: 7 homens e 3 mulheres, que trabalham das 6 h às 12 h.

- Grupo II: 4 homens e 6 mulheres, que trabalham das 9 h às 15 h.

- Grupo III: 1 homem e 9 mulheres, que trabalham das 12 h às 18 h. A respeito dessa equipe, julgue o item que se segue.

Se, nesse serviço de telemarketing, a média das idades das atendentes for de 21 anos e a média das idades dos atendentes for de 31 anos, então a média das idades de todos os 30 atendentes será de 26 anos.

Resolução

O total de homens é 7 + 4 + 1 = 12 e o total de mulheres é 3 + 6 + 9 = 18.

A média global é a média ponderada das médias dos homens e das mulheres e os pesos de ponderação são as quantidades de homens em mulheres.

Vamos, então, multiplicar a média dos homens pela quantidade de homens, a média das mulheres pela quantidade de mulheres, somar tudo e dividir pela quantidade total de pessoas, que é a soma dos pesos.

$$\overline{x} = \frac{\overline{h} \cdot 12 + \overline{m} \cdot 18}{12 + 18} = \frac{31 \cdot 12 + 21 \cdot 18}{30} = \frac{750}{30} = 25$$

Gabarito: Errado.

5. Equações e Sistemas do Primeiro Grau

Para resolver equações do primeiro grau, basta isolar a incógnita. Para tanto, vamos aprender alguns procedimentos básicos para construir equações equivalentes à equação dada de tal forma que no final a incógnita fique isolada.

i) Ao somar ou subtrair um mesmo número real k em ambos os lados de uma equação, obtém-se uma equação equivalente.

Tome por exemplo a equação 2x + 3 = 7. Podemos adicionar o número -3 aos dois membros da equação.

$$2x + 3 = 7$$
$$2x + 3 - 3 = 7 - 3$$
$$2x = 4$$

Ao adquirir prática, você efetuará este procedimento automaticamente jogando números de um lado para o outro da equação simplesmente trocando o seu sinal. Em suma, quando um número positivo estiver em um lado da equação, você pode transportá-lo para o outro lado da equação trocando o seu sinal. Entretanto, o que estamos fazendo na verdade é adicionando o oposto do número aos dois lados da equação.

Veja outro exemplo:

$$3x - 5 = 10$$
$$3x - 5 + 5 = 10 + 5$$
$$3x = 15$$

Ou você pode simplesmente fazer:

$$3x - 5 = 10$$
$$3x = 10 + 5$$
$$3x = 15$$

i) Ao multiplicar ou dividir um mesmo número real k em ambos os lados de uma equação, obtém-se uma equação equivalente. No caso da divisão, o número k não pode ser igual a zero.

Tome por exemplo a equação 2x =4. Podemos dividir os dois membros da equação por 2.

$$2x = 4$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$$
$$x = 2$$

Ao adquirir prática, você efetuará este procedimento automaticamente jogando números de um lado para o outro da equação. Se um número não-nulo está multiplicando um membro inteiro de uma equação, você pode transportá-lo dividindo todo o outro membro. Se um número está dividindo um membro inteiro de uma equação, você pode transportá-lo multiplicando o outro membro.

Veja outro exemplo:

$$\frac{x}{3} = 9$$
$$\frac{x}{3} \cdot 3 = 9 \cdot 3$$
$$x = 27$$

Ou você pode simplesmente fazer:

$$\frac{x}{3} = 9$$

$$x = 9 \cdot 3$$

$$x = 27$$

<u>Dica</u>: Quando uma equação possuir frações, multiplique os dois membros da equação pelo MMC dos denominadores. Veja o seguinte exemplo:

$$\frac{2x}{3} + 3(x-2) + \frac{5}{6} = 4x - \frac{1}{2} - 2(x-1)$$

O MMC dos denominadores é MMC(3,6,2) = 6. Vamos primeiro eliminar os parênteses e, em seguida, multiplicar os dois membros da equação por 6.

$$\frac{2x}{3} + 3x - 6 + \frac{5}{6} = 4x - \frac{1}{2} - 2x + 2$$

$$6 \cdot \frac{2x}{3} + 6 \cdot 3x - 6 \cdot 6 + 6 \cdot \frac{5}{6} = 6 \cdot 4x - 6 \cdot \frac{1}{2} - 6 \cdot 2x + 6 \cdot 2$$

Obviamente você não precisa escrever isso. Você pode já ir multiplicando automaticamente em sua cabeça.

Para multiplicar a fração, primeiro divida o MMC pelo denominador e multiplique o resultado pelo numerador (divida pelo número que está embaixo e multiplique o resultado pelo número que está em cima).

Por exemplo, na primeira fração: Divida 6 por 3 – o resultado é 2. Depois multiplique 2 por 2 e obtenha 4.

$$4x + 18x - 36 + 5 = 24x - 3 - 12x + 12$$

Vamos agora agrupar os membros semelhantes em cada lado da equação.

$$22x - 31 = 12x + 9$$

Vamos passar os termos que contém "x" para o primeiro membro e os números para o segundo membro. Lembre-se de inverter os sinais.

$$22x - 12x = 31 + 9$$

$$10x = 40$$

$$x = \frac{40}{10} = 4$$

Assim, o conjunto verdade da equação dada é V = {4}.

- Problemas do primeiro grau são problemas que podem ser resolvidos com uma equação ou um sistema do primeiro grau.

(CESPE 2017/PM-AL)

Os soldados Pedro e José, na função de armeiros, são responsáveis pela manutenção de determinada quantidade de armas da corporação — limpeza, lubrificação e municiamento. Se Pedro fizer a manutenção das armas que estavam a seu encargo e de mais 50 que estavam a cargo de José, então Pedro fará a manutenção do dobro de armas que sobraram para José. Se José fizer a manutenção das armas que estavam a seu encargo e de mais 60 que estavam a cargo de Pedro, José fará a manutenção do triplo de armas que sobraram para Pedro. Nesse caso, a quantidade de armas para manutenção a cargo de Pedro e José é superior a 260.

Resolução

Vamos considerar que as quantidades de armas de Pedro e José são, respectivamente, p e j.

Na primeira situação, Pedro vai fazer a manutenção das suas p armas e de mais 50 armas de José.

Portanto, Pedro terá p + 50 armas e José terá j – 50 armas.

O enunciado afirma que, neste caso, Pedro fará a manutenção do dobro de armas que sobraram para José.

$$Pedro = 2 \times José$$

$$p + 50 = 2 \cdot (j - 50)$$

$$p + 50 = 2j - 100$$

$$\boxed{p = 2j - 150}$$

Na segunda situação, José ficará com as suas j armas e mais 60 que estavam sob responsabilidade de Pedro.

Portanto, José ficará com j + 60 armas e Pedro ficará com p – 60 armas. Neste caso, José terá o triplo de armas de Pedro.

$$José = 3 \times Pedro$$

$$j + 60 = 3 \cdot (p - 60)$$

Sabemos que $p = 2j - 150$. Portanto,

$$j + 60 = 3 \cdot (2j - 150 - 60)$$

$$j + 60 = 3 \cdot (2j - 210)$$

$$j + 60 = 6j - 630$$

$$60 + 630 = 6j - j$$

$$5j = 690$$

$$j = \frac{690}{5} = 138$$

Assim, a quantidade de armas de Pedro é:

$$p = 2j - 150$$

$$p = 2 \cdot 138 - 150 = 126$$

O total de armas de Pedro e José é

$$p + j = 126 + 138 = 264$$

Gabarito: Certo

---

6. Mínimo Múltiplo Comum

Normalmente, os problemas envolvendo MMC são aqueles em que há acontecimentos periódicos. Vejamos um exemplo.

Três agentes penitenciários fazem rondas noturnas em um determinado presídio. O primeiro tem que acionar o relógio de controle a cada 36 minutos; o segundo, a cada 24 minutos, e o terceiro, a cada 18 minutos. Dessa maneira, pode-se afirmar que eles acionam simultaneamente o relógio de controle a cada

(A) 1 h 24 min.

(B) 1 h 18 min.

(C) 1 h 12 min.

(D) 1 h 06 min.

(E) 1 h.

Resolução

Para calcular o tempo de coincidência dos eventos (período comum) devemos calcular o mínimo múltiplo comum dos períodos.

$$\begin{array}{ll} 36, 24, 18 & 2 \\ 18.\ 12, 9 & 2 \\ 9,\quad 6, 9 & 2 \\ 9,\quad 3, 9 & 3 \\ 3,\quad 1, 3 & 3 \\ 1,\quad 1\,, 1 & \end{array}$$

Desta forma, $m.m.c.(36,24,18) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72\ minutos.$

$72\ min = 60\ min + 12\ min = 1h\ 12\ min$

Gabarito: C

7. Função Polinomial do 1º Grau

Na parte de função afim (função polinomial do primeiro grau), acho importante saber como determinar a equação da reta.

Com isto, a partir de certos dados que variam linearmente, podemos determinar a equação da reta e determinar valores futuros.

Quando são dados dois pontos (x_1,y_1) e (x_2,y_2), a taxa de variação pode ser calculada como o quociente entre a variação de y e a variação de x.

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Exemplo: Determine a lei de formação da função afim que passa pelos pontos $(2,5)$ e $(-1,-4)$.

Resolução

Já que o gráfico passa pelos pontos $(2,5)$ e $(-1,-4)$, então o coeficiente "a" é dado por

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4-5}{-1-2} = \frac{-9}{-3} = +3$$

Lembre-se que a lei de formação da função afim é do tipo $y = ax + b$.

Tendo calculado o coeficiente "a", a lei de formação da função afim torna-se $y = 3x + b$. Podemos agora utilizar qualquer um dos pontos para calcular o coeficiente "b".

O coeficiente "b" é denominado coeficiente linear ou termo independente. Ele é o intercepto do gráfico com o eixo y.

Utilizemos por exemplo o ponto (2,5). Este ponto nos informa que quando x = 2, y = 5. Já que a lei de formação é $y = 3x + b$, devemos substituir esses valores na lei.

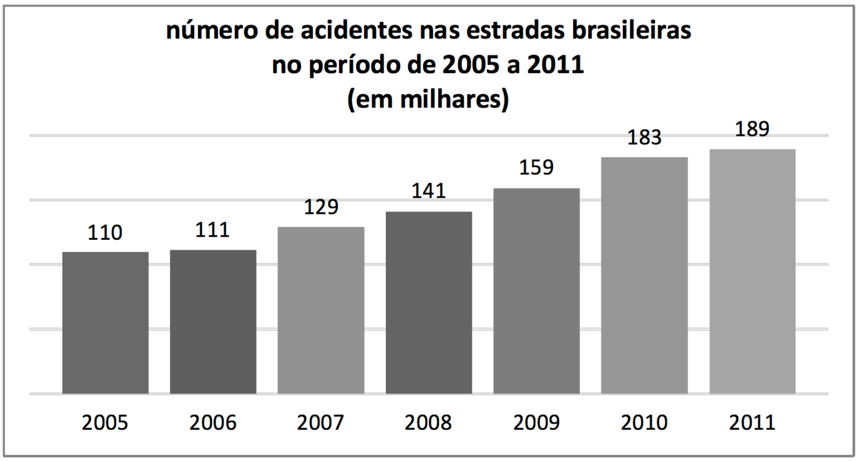
$$3 \cdot 2 + b = 5$$

$$6 + b = 5$$

$$b = -1$$

Assim, a lei de formação da função é $y = 3x - 1$.

(CESPE 2013/PRF)



Considere que, em 2009, tenha sido construído um modelo linear para a previsão de valores futuros do número de acidentes ocorridos nas estradas brasileiras. Nesse sentido, suponha que o número de acidentes no ano t seja representado pela função F(t) = At + B, tal que F(2007) = 129.000 e F(2009) =159.000. Com base nessas informações e no gráfico apresentado, julgue os itens a seguir.

1. **O valor da constante A em F(t) é superior a 14.500.**

2. **A diferença entre a previsão para o número de acidentes em 2011 feita pelo referido modelo linear e o número de acidentes ocorridos em 2011 dado no gráfico é superior a 8.000.**

Resolução

Vamos calcular a taxa de variação A. A taxa de variação é o quociente entre a variação de y pela variação de x.

$$A = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{159.000 - 129.000}{2009 - 2007} = \frac{30.000}{2} = 15.000$$

Portanto, o item I está certo.

Isto significa que a cada ano o número de acidentes aumentará em 15.000. Assim, de 2009 a 2011 o número de acidentes aumentará 2 x 15.000 = 30.000.

Como em 2009 foram 159.000 acidentes, então haverá 159.000 + 30.000 = 189.000 acidentes em 2011. Este é justamente o número de acidentes ocorridos em 2011 de acordo com o gráfico.

Assim, a diferença entre a previsão e o número de acidentes ocorridos é igual a zero.

O item II está errado.

Gabarito: Certo, Errado

8. FUNÇÃO QUADRÁTICA

Na parte sobre Função Quadrática (Função Polinomial do 2º Grau), é importantíssimo saber como calcular o ponto de máximo ou ponto de mínimo da função.

O ponto de interseção da parábola com o seu eixo de simetria é chamado vértice da parábola.

Quando a > 0, o vértice é um ponto de mínimo.

Quando a < 0, o vértice é um ponto de máximo.

As coordenadas do vértice são dadas por:

$$\boxed{\begin{aligned} x_v &= \frac{-b}{2a} \\ y_v &= \frac{-\Delta}{4a} \end{aligned}}$$

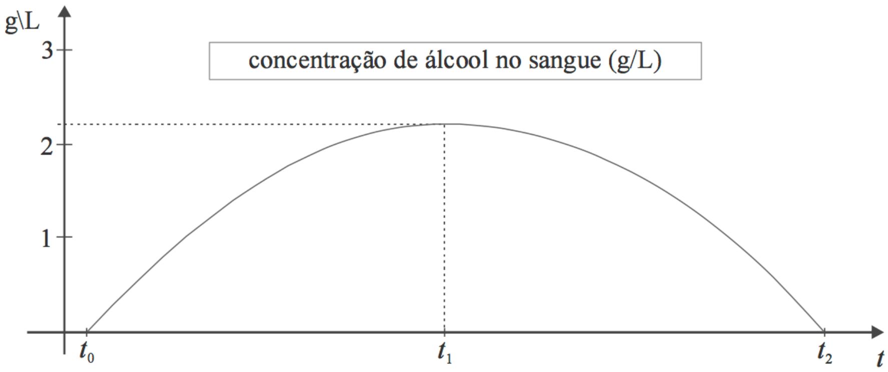
Também é possível calcular a coordenada x_v pela média aritmética das raízes da função.

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Para calcular a coordenada y_v, basta substituir x_v na expressão $y = ax^2 + bx + c$.

HORA DE PRATICAR!

(CESPE 2013/PRF)



Considere que o nível de concentração de álcool na corrente sanguínea, em g/L, de uma pessoa, em função do tempo t, em horas, seja expresso por $N = -0{,}008(t^2 - 35t + 34)$. Considere, ainda, que essa pessoa tenha começado a ingerir bebida alcoólica a partir de t = t_0 ($N(t_0) = 0$). Considere, por fim, a figura acima, que apresenta o gráfico da função N(t) para $t \in [t_0, t_2]$. Com base nessas informações e tomando 24,3 como valor aproximado de $\sqrt{589}$, julgue os itens que se seguem.

1. **O nível de concentração mais alto de álcool na corrente sanguínea da referida pessoa ocorreu em t = t_1 com t_1 > 18 horas.**

2. **O nível de concentração de álcool na corrente sanguínea da pessoa em questão foi superior a 1 g/L por pelo menos 23 horas.**

3. **O valor de t_2 é inferior a 36.**

Resolução

<u>Item 1</u>

A função é dada por:

$$N = -0{,}008(t^2 - 35t + 34)$$

$$N = -0{,}008t^2 + 0{,}28t - 0{,}272$$

Esta é uma função quadrática em que a = - 0,008, b = 0,28 e c = - 0,272.

Para calcular o tempo em que a concentração de álcool foi máxima, devemos calcular a abscissa do vértice da parábola, que é dada pela seguinte fórmula:

$$t_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-0{,}28}{2 \cdot (-0{,}008)} = 17{,}5\ horas$$

O item está errado, pois 17,5 < 18.

Item 2

O nível de concentração de álcool na corrente sanguínea da pessoa em questão foi superior a 1 g/L por pelo menos 23 horas.

Resolução

A função é dada por:

$$N = -0{,}008(t^2 - 35t + 34)$$

$$N = -0{,}008t^2 + 0{,}28t - 0{,}272$$

Vamos verificar para quais valores de t a concentração é igual a 1.

$$-0{,}008t^2 + 0{,}28t - 0{,}272 = 1$$

$$-0{,}008t^2 + 0{,}28t - 1{,}272 = 0$$

Vamos multiplicar esta equação por (-1).

$$0{,}008t^2 - 0{,}28t + 1{,}272 = 0$$

Vamos agora multiplicar esta equação por 1.000, para eliminar as casas decimais.

$$8t^2 - 280t + 1272 = 0$$

Vamos agora dividir toda a equação por 8 para simplificar os valores.

$$t^2 - 35t + 159 = 0$$

Temos agora uma equação do segundo grau em que a = 1, b = -35 e c = 159.

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{35 \pm \sqrt{(-35)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 159}}{2 \cdot 1} = \frac{35 \pm \sqrt{589}}{2}$$

A questão pede para considerar $\sqrt{589}$ igual a 24,3.

$$t = \frac{35 \pm \sqrt{589}}{2} = \frac{35 \pm 24{,}3}{2}$$

$$t = 5{,}35 \; ou \; t = 29{,}65$$

O que isto significa? Que t = 5,35 horas foi o primeiro instante em que o indivíduo teve o nível de concentração de álcool igual a 1 g/L. O nível de álcool foi aumentando atingindo seu valor máximo em t = 17,5 horas (questão anterior). Depois o nível alcoólico foi baixando até que em t = 29,65 o nível atingiu 1 g/L novamente. Assim, o tempo em que o nível alcoólico foi superior a 1 g/L é igual a 29,65 – 5,35 = 24,3 horas. O item está certo.

Item 3

O valor de t_2 é inferior a 36.

Resolução

Pelo gráfico, t_2 é o segundo instante em que o nível de álcool no sangue foi igual a zero. Basta igualar a função a zero para descobrir este valor.

$$-0{,}008(t^2 - 35t + 34) = 0$$

O número – 0,008 que está multiplicando o primeiro membro, passa dividindo o segundo membro.

$$t^2 - 35t + 34 = \frac{0}{-0{,}008}$$

$$t^2 - 35t + 34 = 0$$

Temos uma equação do segundo grau em que a = 1, b = -35 e c = 34.

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{35 + \sqrt{(-35)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 34}}{2 \cdot 1} = \frac{35 \pm \sqrt{1.089}}{2}$$

$$t = \frac{35 \pm 33}{2}$$

$$t = 1 \; ou \; t = 34$$

Assim, $t_1 = 1$ e $t_2 = 34$. O item está certo.

Gabarito: errado; certo; certo

9. LOGARITMOS

Acredito que os assuntos de equações exponenciais e logarítmicas serão abordados nas questões de Juros Compostos.

Às vezes é necessário o uso de equações exponenciais logaritmos para resolver algumas questões no regime composto.

Para entender o conceito de logaritmos, basta aprender que logaritmo é um sinônimo de expoente.

TOME NOTA!

Pensou em logaritmos, pensou em expoente.

Assim, qual o significado da expressão $\log_3 9$?

Devemos raciocinar da seguinte forma:

Qual o expoente que se deve dar à base 3 para que o resultado seja 9? Ou ainda: 3 elevado a que número é igual a 9? A resposta é 2.

$$\text{Portanto, } \log_3 9 = 2.$$

São equivalentes, portanto, as duas expressões:

$$\log_3 9 = 2 \Leftrightarrow 3^2 = 9$$

Em outras palavras, tanto faz escrever $3^2 = 9$ como escrever $\log_3 9 = 2$.

Vejamos outro exemplo. Calcular o valor de $\log_5 125$.

Devemos raciocinar da seguinte forma: 5 elevado a que número é igual a 125? A resposta é 3.

Portanto, $\log_5 125 = 3$.

$$\log_5 125 = 3 \Leftrightarrow 5^3 = 125$$

E é importante saber a seguinte relação:

$$\boxed{\log_b a = x \quad \Leftrightarrow \quad b^x = a}$$

Vejamos mais alguns exemplos para fixar o conceito.

Exemplo: Calcular $\log_4 16$. A pergunta que deve ser feita é: 4 elevado a quanto é igual a 16? A resposta é 2. Portanto, $\log_4 16 = 2$.

Exemplo: Calcular $\log_6 6$. A pergunta que deve ser feita é: 6 elevado a quanto é igual a 6? A resposta é 1. Portanto, $\log_6 6 = 1$.

Exemplo: Calcular $\log_4 1$. A pergunta que deve ser feita é: 4 elevado a quanto é igual a 1? A resposta é 0. Portanto, $\log_4 1 = 0$.

Exemplo: Calcular $\log_5 1/25$. A pergunta que deve ser feita é: 5 elevado a quanto é igual a 1/25? A resposta é -2. Portanto, $\log_5 1/25 = -2$.

Existem dois sistemas de logaritmos que por serem muito importantes recebem uma notação especial:

i) Sistema de logaritmos decimais

É o sistema de **base 10**.

Utilizaremos a seguinte notação:

$$\mathbf{\log_{10} x = \log x}$$

Assim, **se a base não estiver explícita**, já sabemos que se trata de um **logaritmo de base 10**.

Exemplo:

$$\log 2 = \log_{10} 2$$

ii) Sistema de logaritmos neperianos ou naturais.

É o sistema de base $\boldsymbol{e = 2{,}71828182\ldots}$

Adotaremos a seguinte notação:

$$\boldsymbol{\log_e x = lnx}$$

Observe que, por exemplo:

$$\ln 4 = \log_e 4$$

Se um problema informa, por exemplo, que $\ln 2 = 0{,}693$, você pode concluir que $e^{0{,}693} = 2$.

Vamos relembrar as principais propriedades operatórias dos logaritmos.

i) Se x e y são dois números reais positivos e iguais ($x = y$), então $\log_a x = \log_a y$.

Em outras palavras, se dois números positivos são iguais, então seus logaritmos (em qualquer base) também serão iguais. Isso é por demais óbvio.

ii) $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$

A segunda propriedade diz que se o logaritmando possui um expoente, então o expoente pode sair da logaritmando e passar a multiplicar o logaritmo.

Por exemplo, $\log 8 = \log 2^3 = 3 \cdot \log 2$.

iii) O **logaritmo do produto** de dois ou mais fatores reais e positivos **é igual a soma dos logaritmos dos fatores (em qualquer base)**.

$$\boldsymbol{\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y}$$

Exemplo:

Sabemos que:

$$\log_2 8 = 3, porque\ 2^3 = 8.$$

$$\log_2 16 = 4, porque\ 2^4 = 16.$$

Vamos calcular o logaritmo de $128 = 8 \times 16$ na base 2.

$$\log_2 128 = \log_2(8 \cdot 16) = \log_2 8 + \log_2 16 = 3 + 4 = 7$$

Portanto,

$$\log_2 128 = 7$$

O que é verdade, já que $2^7 = 128$.

iv) O **logaritmo do quociente** de dois números reais e positivos **é igual à diferença entre o logaritmo do dividendo e o logaritmo do divisor (em qualquer base)**.

$$\boldsymbol{\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y}$$

Exemplo:

Sabemos que:

$$\log_3 9 = 2, porque\ 3^2 = 9.$$
$$\log_3 243 = 5, porque\ 3^5 = 243.$$

Vamos calcular o logaritmo de $27 = 243/9$ na base 3.

$$\log_3 27 = \log_3\left(\frac{243}{9}\right) = \log_3 243 - \log_3 9 = 5 - 2 = 3$$

Portanto,

$$\log_3 27 = 3$$

O que é verdade, já que $3^3 = 27$.

v) Se o logaritmando e a base são iguais, então o logaritmo é igual a 1, ou seja,

$$\log_a a = 1$$

Exemplos:

$$\log_5 5 = 1$$

$$\log 10 = \log_{10} 10 = 1$$

$$\ln e = \log_e e = 1$$

(CESPE 2015/TCE-RN)

Considerando que 0,7, 0,05 e 1,8 sejam os valores aproximados, respectivamente, de ln2, ln1,05 e $1{,}05^{12}$, julgue o item a seguir, referente a juros.

Se, no regime de juros compostos, a taxa de juros efetiva for de 5% ao mês, será necessário um período superior a 15 meses para que o valor de um capital inicial dobre.

Resolução

Suponha que o capital inicial seja de 100 reais. Para que o capital dobre, o montante deverá ser 200 reais.

A taxa é de 5% ao mês. Vamos utilizar a fórmula de juros compostos.

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

$$200 = 100 \cdot (1 + 0{,}05)^n$$

$$2 = 1{,}05^n$$

Observe que os logaritmos dados no enunciado são de base "e", ou seja, são logaritmos naturais.

Como 2 e $1{,}05^n$ são iguais, então seus logaritmos serão iguais em qualquer base. Vamos utilizar a base dada no enunciado.

$$\ln 2 = \ln 1{,}05^n$$

Vamos utilizar a propriedade do logaritmo da potência.

$$\ln 2 = n \cdot \ln 1{,}05$$

$$0{,}7 = n \cdot 0{,}05$$

$$n = \frac{0{,}7}{0{,}05}$$

$$n = \frac{0{,}70}{0{,}05} = \frac{70}{5} = 14\,meses$$

Será necessário um período de 14 meses para dobrar o capital.

Gabarito: ERRADO

---

10. ANÁLISE COMBINATÓRIA, PROBABILIDADE E BINÔMIO DE NEWTON

Análise Combinatória e Probabilidade sempre estão presentes nas provas do CESPE.

Em Análise Combinatória, basicamente, você precisa saber o Princípio Fundamental da Contagem e Combinações. São os assuntos mais cobrados no CESPE.

Vamos revisar estes assuntos através de questões que considero bastante prováveis de aparecer novamente.

(CESPE 2018/EBSERH)

Julgue o próximo item, a respeito de contagem.

Se a enfermaria de um hospital possuir cinco leitos desocupados e se cinco pacientes forem ocupar esses leitos, então haverá mais de 100 formas diferentes de fazer essa ocupação.

Resolução

O problema é resolvido em 5 etapas: escolher o paciente que vai ocupar o primeiro leito, escolher o paciente que vai ocupar o segundo leito, e assim por diante.

Há 5 possibilidades na escolha do paciente que vai ocupar o primeiro leito.

Há 4 possibilidades na escolha do paciente que vai ocupar o segundo leito.

Há 3 possibilidades na escolha do paciente que vai ocupar o terceiro leito.

Há 2 possibilidades na escolha do paciente que vai ocupar o quarto leito.

Há 1 possibilidade na escolha do paciente que vai ocupar o quinto leito.

Pelo princípio fundamental da contagem, há $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ formas de escolher a disposição dos pacientes no leito.

Gabarito: Certo.

(CESPE 2017/Pref. de São Luís)

Em 2015, na cidade de São Luís, 1.560 docentes atuavam

nas escolas de ensino fundamental. Entre eles, havia 450 Marias e 150 Pedros. Esses 1.560 docentes eram distribuídos, para cada escola, de forma aleatória.

Nessa situação, assinale a opção que apresenta a expressão que permite determinar a quantidade de possíveis escolhas para a formação do primeiro grupo de 20 professores de maneira que, nesse grupo, não haja nenhuma Maria e nenhum Pedro.

$a)\dfrac{600!}{20! \times 580!}$

$b)\dfrac{1.560!}{600!}$

$c)\dfrac{300!}{20!}$

$d)\dfrac{960!}{600! \times 360!}$

$e)\dfrac{960!}{20! \times 940!}$

Resolução

Vamos retirar as 450 Marias e os 150 Pedros do grupo de 1.560 docentes. Restarão 1.560 – 450 – 150 = 960 docentes.

Dos 960 docentes, escolheremos 20. Observe que a ordem dos docentes não influencia na formação do agrupamento. Por isso, vamos utilizar combinações. Há 960 docentes disponíveis e devemos escolher 20.

C_{960}^{20}

A banca requer, neste caso, a utilização da fórmula do número de combinações. Começamos com o fatorial do maior número no numerador e o fatorial do menor número no denominador. Completaremos o denominador colocando o fatorial da diferença entre os números.

$$C_{960}^{20} = \frac{960!}{20! \times 940!}$$

Gabarito: E

(CESPE 2014/PMCE)

Considerando que um grupamento de 60 policiais militares em que haja 15 mulheres e 45 homens seja dividido em 10 equipes de 6 militares para monitorar determinada área, julgue o item subsequente.

Se as 2 primeiras equipes formadas forem constituídas apenas por mulheres, então o número de maneiras distintas de escolher os membros dessas equipes será igual a $\frac{15!}{6! \cdot 6! \cdot 3!}$.

Resolução

Há 15 mulheres e devemos escolher 6 para a primeira equipe. Em seguida, sobram 9 mulheres das quais devemos escolher 6 para a segunda equipe.

Observe que queremos colocar 6 mulheres na primeira equipe e 6 mulheres na segunda equipe. Como o conectivo usado é "e", devemos multiplicar as quantidades.

O total de maneiras para escolher os membros dessa equipe é

$$C_{15}^{6} \cdot C_{9}^{6} = \frac{15!}{6!\,9!} \cdot \frac{9!}{6!\,3!} = \frac{15!}{6!\,6!\,3!}$$

Gabarito: certo.

(CESPE 2014/PMCE)

Considerando que um grupamento de 60 policiais militares em que haja 15 mulheres e 45 homens seja dividido em 10 equipes de 6 militares para monitorar determinada área, julgue o item subsequente.

O número de maneiras distintas de escolher 6 militares para formarem a primeira equipe, de tal forma que essa equipe tenha pelo menos cinco mulheres, é inferior a $\frac{4 \cdot 15!}{9! \cdot 5!}$.

Resolução

Podemos ter equipe com 5 mulheres e 1 homem ou 6 mulheres. Lembre-se que "e" indica multiplicação e "ou" indica adição.

Assim, vamos escolher 5 mulheres (dentre 15 disponíveis) e 1 homem (dentre 45 disponíveis) ou 6 mulheres (dentre 15 disponíveis).

$$C_{15}^{5} \cdot C_{45}^{1} + C_{15}^{6} = \frac{15!}{5!\,10!} \cdot 45 + \frac{15!}{6!\,9!} =$$

$$= \frac{15!}{5!\,10 \cdot 9!} \cdot 45 + \frac{15!}{6!\,9!}$$

$$= \frac{15! \cdot 4{,}5}{5! \cdot 9!} + \frac{15!}{6!\,9!}$$

Observe o fato de que 10! = 10 x 9!. Depois dividimos 45 por 10.

A primeira parcela sozinha já é maior que o número dado no enunciado.

Gabarito: errado.

(CESPE 2018/ABIN)

Como forma de melhorar a convivência, as famílias Turing, Russell e Gödel disputaram, no parque da cidade, em um domingo à tarde, partidas de futebol e de vôlei. O quadro a seguir mostra os quantitativos de membros de cada família presentes no parque, distribuídos por gênero.

família	masculino	feminino
Turing	5	7
Russell	6	5
Gödel	5	9

A partir dessa tabela, julgue os itens subsequentes.

Considere que, em eventual sorteio de brindes, um nome tenha sido retirado, ao acaso, do interior de uma urna que continha os nomes de todos os familiares presentes no evento. Nessa situação, sabendo-se que o sorteado não é uma mulher da família Gödel, a probabilidade de ser uma mulher da família Russel será superior a 20%.

Resolução

Esta questão homenageia 3 grandes matemáticos: Alan Turing, Bertrand Russel e Kurt Gödel.

Sabemos que a pessoa sorteada não é uma mulher da família Gödel. Vamos excluir as mulheres da família Gödel do nosso espaço amostral.

Portanto, o número de casos possíveis é 5 + 6 + 5 + 7 + 5 = 28.

Queremos calcular a probabilidade de a pessoa sorteada ser uma mulher da família Russel: há 5 casos desejados.

Assim, a probabilidade pedida é 5/28 $\cong 17{,}8\%$.

Gabarito: Errado

(CESPE 2017/SEDF)

Cinco mulheres e quatro homens trabalham em um escritório. De forma aleatória, uma dessas pessoas será escolhida para trabalhar no plantão de atendimento ao público no sábado. Em seguida, outra pessoa será escolhida, também aleatoriamente, para o plantão no domingo.

Considerando que as duas pessoas para os plantões serão selecionadas sucessivamente, de forma aleatória e sem reposição, julgue os próximos itens.

1. A probabilidade de os dois plantonistas serem homens é igual ou superior a 4/9.
2. A probabilidade de os plantões serem feitos por um homem e uma mulher é igual a 5/9.

Resolução

Item 1:

A probabilidade de o primeiro ser homem é 4/9. A probabilidade de o segundo ser homem é 3/8. Assim, a probabilidade pedida é

$$\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}=\frac{12}{72}=\frac{1}{6}\cong 0{,}16$$

Este número é menor que 4/9 = 0,444...

O item 1 está errado.

Item 2:

Podemos ter (H e M) ou (M e H).

A probabilidade de termos homem no sábado e mulher no domingo é (4/9) x (5/8).

A probabilidade de termos mulher no sábado e homem no domingo é (5/9) x (4/8).

A probabilidade pedida é

$$\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}+\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}=\frac{20}{72}+\frac{20}{72}=\frac{40}{72}=\frac{5}{9}$$

O item 2 está certo.

Gabarito: Errado, Certo

Acho pouco provável a cobrança do assunto Binômio de Newton. Caso este assunto seja cobrado, acredito que será pedindo a soma dos coeficientes do desenvolvimento do Binômio de Newton ou pedindo o cálculo do termo independente.

Se o problema pedir a soma dos coeficientes, a solução do problema é instantânea: basta substituir as variáveis por 1.

(CESPE 2017/SEDF)

Acerca do binômio de Newton, julgue o item seguinte.

A soma dos coeficientes do polinômio $p(x) = (10x - 11)^{85}$ é um número positivo.

Resolução

Para calcular a soma dos coeficientes, basta substituir as variáveis por 1.

$$p(1) = (10 \cdot 1 - 11)^{85} = (-1)^{85} = -1$$

A soma dos coeficientes é um número negativo.

Gabarito: Errado

Se o problema pedir o cálculo do termo independente, você terá que utilizar a fórmula do termo geral.

Exemplo: Qual o termo independente no desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^4$.

Resolução

Observe que $\frac{1}{x} = x^{-1}$.

Assim, queremos o termo independente do desenvolvimento de $(x + x^{-1})^4$.

Vamos calcular o termo geral. A fórmula do termo geral do desenvolvimento de uma expressão do tipo $(a + b)^n$ é dada por:

$$\binom{n}{p} \cdot a^{n-p} \cdot b^p$$

Cada termo vai ser o produto do binomial $\binom{4}{p}$ por potências dos termos.

Assim, cada termo será do tipo:

$$\binom{4}{p} \cdot (x)^{4-p} \cdot (x^{-1})^p$$

$$= \binom{4}{p} \cdot x^{4-p} \cdot x^{-p}$$

Para multiplicar potências de mesma base, devemos repetir a base e somar os expoentes.

$$= \binom{4}{p} \cdot x^{4-p-p}$$

$$= \binom{4}{p} \cdot x^{4-2p}$$

No termo independente, o expoente de x é zero.

$$4 - 2p = 0$$

$$-2p = -4$$

$$p = 2$$

O termo independente é:

$$\binom{4}{2} \cdot x^{4-2\times 2} = \binom{4}{2} \cdot \underbrace{x^0}_{1}$$

$$= \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$$

O termo independente de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^4$ é 6.

11. Matemática Financeira

Esta provavelmente será a parte mais importante na sua prova do BNB.

É crucial que você esteja preparado para efetuar muitas multiplicações e divisões com números decimais.

Vamos resumir as principais fórmulas dos assuntos que serão cobrados na sua prova.

11.1. Juros e Descontos

Lembre-se que, nos dois regimes de capitalização, o montante é sempre a soma do juro com o capital.

$$M = C + J$$

Na parte de Descontos, nos dois regimes de capitalização, o desconto é sempre a diferença entre o valor nominal e o valor atual.

$$D = N - A$$

	Capitalização Simples	Capitalização Composta
Juros	$J = C \cdot i \cdot n$	$J = C \cdot [(1+i)^n - 1]$ Esta fórmula não é muito usada. Neste caso, normalmente calculamos o montante pela fórmula a seguir e depois utilizamos $M = C + J$
Montante	$M = C \cdot (1 + in)$	$M = C \cdot (1+i)^n$
Taxas Proporcionais	São equivalentes	Não são equivalentes
Desconto Racional (por dentro)	$D = A \cdot i \cdot n$ $D = \dfrac{N \cdot i \cdot n}{1 + in}$ $N = A \cdot (1 + in)$	$N = A \cdot (1+i)^n$
Desconto Comercial (por fora)	$A = N \cdot (1 - in)$	$A = N \cdot (1-i)^n$

FIQUE ATENTO!

Nunca podemos utilizar as taxas nominais nas fórmulas de Matemática Financeira. Utilizamos apenas taxas efetivas.

(CESPE 2018/CAGE RS)

Um indivíduo investiu a quantia de R$ 1.000 em determinada aplicação, com taxa nominal anual de juros de 40%, pelo período de 6 meses, com capitalização trimestral.

Nesse caso, ao final do período de capitalização, o montante será de

a) R$ 1.200
b) R$ 1.210
c) R$ 1.331
d) R$ 1.400
e) R$ 1.100

Resolução

Não podemos utilizar a taxa nominal para calcular o montante. Primeiro, precisamos calcular a taxa efetiva.

A taxa nominal é de 40% ao ano com capitalização trimestral. Como cada ano é composto por 4 trimestres, a taxa efetiva será a taxa anual dividida por 4.

$$i = \frac{40\%}{4} = 10\% \; ao \; trimestre$$

O prazo da aplicação será de 6 meses. Portanto, n = 2 trimestres.

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

$$M = 1.000 \cdot (1 + 0{,}10)^2 = 1.210$$

Gabarito: B

11.2. CÁLCULO FINANCEIRO

Vamos agora falar um pouco sobre equivalências de capitais e séries de pagamentos.

No fundo, **só há um único problema de Matemática Financeira**: **deslocar quantias no tempo**.

RESUMINDO

Essa é a fórmula fundamental de equivalência de capitais:

Para obter o valor futuro, basta multiplicar o atual por $(1+i)^n$.

Para obter o valor atual, basta dividir o futuro por $(1+i)^n$.

(CESPE 2016 /FUNPRESP)

Com relação às anuidades e aos sistemas de amortização, julgue o item subsequente.

O valor atual (VA) de uma anuidade *postecipada* que pague R$ 200 ao ano, pelo prazo de três anos, à taxa de juros de 5% ao ano, será corretamente calculado pela expressão VA = 200 × (1 + 0,05) + 200 × $(1 + 0,05)^2$ + 200 × $(1 + 0,05)^3$.

Resolução

Queremos transportar as prestações futuras para a data 0. Para tanto, devemos DIVIDIR cada prestação por $(1+i)^n$. O item está errado, pois as prestações estão sendo multiplicadas por $(1+i)^n$.

Gabarito: ERRADO

(CESPE 2016/TCE-SC)

No item que se segue, é apresentada uma situação hipotética a respeito de avaliação de investimentos e de taxas de juros, seguida de uma assertiva a ser julgada.

Uma casa foi colocada à venda por R$ 120.000 à vista, ou em três parcelas, sendo a primeira de R$ 20.000 no ato da compra e mais duas mensais e consecutivas, sendo a primeira no valor de R$ 48.000 a ser pago um mês após a compra e a segunda, no final do segundo mês, no valor de R$ 72.000. Se a taxa de juros compostos na venda parcelada for de 20% ao mês, a melhor opção de compra é pela compra parcelada.

Resolução

Para comparar as duas opções de pagamento, devemos transportar os valores para uma mesma data (data focal). Vou escolher a data 0, calculando assim o valor presente líquido das duas opções.

Vamos transportar todos os valores para a data da compra.

A primeira opção, pagamento à vista, já está na data desejada. Vamos efetuar o transporte dos valores da segunda opção.

$$A = 20.000 + \frac{48.000}{1{,}20} + \frac{72.000}{1{,}20^2}$$

$$A = 20.000 + 40.000 + 50.000 = 110.000$$

Assim, é mais vantajosa a segunda opção.

Gabarito: Certo

No caso de uma série uniforme de pagamentos, teremos basicamente duas fórmulas.

- Valor Futuro de uma Renda Certa

$$F = P \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

- Valor Atual de uma Renda Certa

$$A = P \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n}$$

Na maioria das questões do CESPE, a fórmula do valor atual será "reescrita" para que possamos utilizar fatores $(1+i)^{-n}$.

$$A = P \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

(CESPE 2018/CAGE RS)

Um pai, preocupado em compor recursos para a educação superior de seu filho, idealizou juntar dinheiro em uma conta investimento que rende 8% ao ano. O pai depositaria, durante nove anos, R$ 24.000 por ano nessa conta, para que o filho fizesse cinco saques de valores iguais, um a cada ano, com o primeiro saque um ano após o último depósito. O saldo remanescente a cada saque ficaria rendendo à mesma taxa até o quinto saque, quando o saldo se anularia.

Nessa situação, considerando-se 0,68 e 2 como valores aproximados para $(1{,}08)^{-5}$ e $(1{,}08)^{9}$, respectivamente, cada saque anual teria o valor de

a) R$ 67.100.

b) R$ 75.000

c) R$ 150.000.

d) R$ 10.500.

e) R$ 43.200.

Resolução

O pai fará 9 depósitos anuais de R$ 24.000,00 a uma taxa de 8% ao ano. Vamos calcular o valor futuro desta série de pagamentos. Lembre-se que o valor futuro calculado estará na mesma data do último depósito.

$$F = P \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$F = 24.000 \cdot \frac{1{,}08^9 - 1}{0{,}08}$$

$$F = 24.000 \cdot \frac{2-1}{0{,}08}$$

$$F = 24.000 \cdot \frac{1}{0{,}08}$$

$$F = 300.000$$

Assim, o pai acumulou R$ 300.000,00.

Um ano após, começará uma série de 5 saques. A taxa de juros é a mesma.

O valor atual desta série de saques é o valor acumulado de 300.000 reais.

Vamos calcular o valor de cada um desses saques.

$$A = P \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$300.000 = P \cdot \frac{1-(1+0{,}08)^{-5}}{0{,}08}$$

$$300.000 = P \cdot \frac{1 - 1{,}08^{-5}}{0{,}08}$$

$$300.000 = P \cdot \frac{1 - 0{,}68}{0{,}08}$$

$$300.000 = P \cdot \frac{0{,}32}{0{,}08}$$

$$300.000 = P \cdot 4$$

$$P = 75.000$$

Gabarito: B

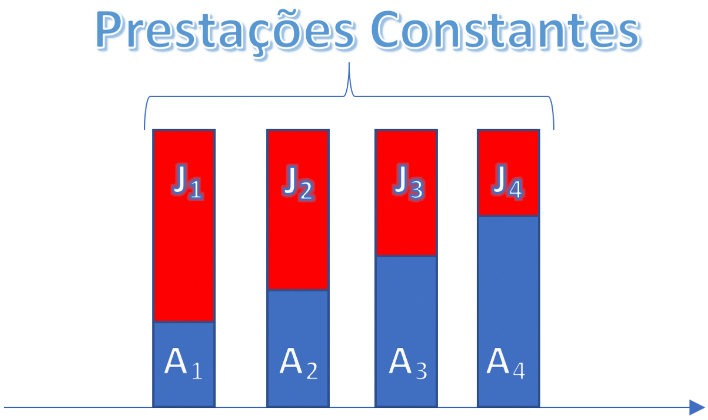
11.3. Sistemas de Amortização

Os Sistemas de Amortização mais importantes para a sua prova do BNB são o Sistema Francês e o SAC.

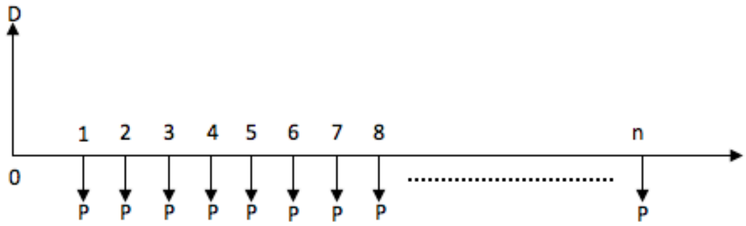
- Sistema Francês

Esse sistema admite **prestações constantes e periódicas** ao longo de todo o período de amortização.

Já que as prestações são constantes, à medida que são pagas as parcelas, a quota de amortização vai aumentando enquanto a quota de juros vai diminuindo.



Esse sistema corresponde à sequência de anuidades periódicas postecipadas e esquematizadas da seguinte forma:



Onde D é o valor do empréstimo na data 0 e P é o valor de cada prestação.

Trata-se na realidade do cálculo do valor atual de uma sequência uniforme de capitais.

No Sistema Francês de Amortização as parcelas são calculadas a partir das seguintes expressões:

$$A = P \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n} = P \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

As quotas de amortização no Sistema Francês formam uma progressão geométrica de razão $(1+i)$.

Assim, calculada a quota de amortização da primeira prestação, podemos calcular a quota de amortização referente a qualquer outro período através da seguinte fórmula.

$$A_n = A_1 \cdot (1+i)^{n-1}$$

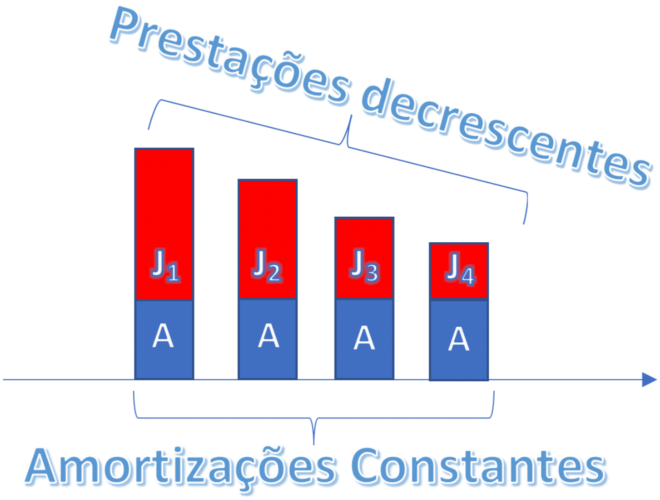
- Sistema de Amortização Constante (SAC)

Como o próprio nome já indica, as quotas de amortização do SAC são constantes. Logo, as prestações não serão constantes.

É óbvio que à medida que vamos pagando as prestações, cada vez mais amortizamos a dívida, de modo que os juros pagos em cada prestação vão diminuindo.

ACORDE!!

No SAC, as prestações são decrescentes. A quota de amortização é constante e os juros são decrescentes.



As prestações (assim como os juros de cada prestação) formam uma progressão aritmética decrescente de razão $-i \cdot A$, em que A é quota de amortização.

As questões do CESPE que envolvem o SAC são praticamente todas idênticas. Vejamos um exemplo.

(CESPE 2018/TCE-PB)

Um banco emprestou R$ 200.000, entregues no ato, sem prazo de carência. O empréstimo foi quitado pelo sistema de amortização constante (SAC) em 20 prestações semestrais consecutivas.

Nessa situação, se a taxa de juros do empréstimo foi de 1,5% ao semestre, então o valor da quinta prestação, em reais, foi de

a) 12.400.
b) 13.000.
c) 10.000.
d) 11.650.
e) 12.250.

Resolução

O primeiro passo é calcular a quota de amortização.

$$A = \frac{200.000}{20} = 10.000$$

Vamos agora calcular o valor do juro na primeira prestação.

$$J_1 = 1{,}5\%\ de\ 200.000$$

$$J_1 = 0{,}015 \times 200.000 = 3.000$$

Portanto, a primeira prestação é:

$$P_1 = A + J_1$$

$$P_1 = 13.000$$

As prestações do SAC formam uma progressão aritmética de razão $-i \cdot A$.

$$r = -0{,}015 \cdot 10.000 = -150$$

Isso quer dizer que as prestações vão diminuindo 150 reais em cada semestre.

Vamos calcular a quinta prestação utilizando a fórmula do termo geral de uma Progressão Aritmética.

$$P_5 = P_1 + 4r$$
$$P_5 = 13.000 + 4 \cdot (-150) = 12.400$$

Gabarito: A

12. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ficamos por aqui, queridos alunos. Espero que tenham gostado da revisão.

Você também pode me encontrar no instagram @profguilhermeneves ou entrar em contato diretamente comigo pelo meu email profguilhermeneves@gmail.com.

Um forte abraço!!!

Guilherme Neves