

**CONCURSO PÚBLICO DE ADMISSÃO AO COLÉGIO
NAVAL CPACN/2018**

1º Dia – Prova de Matemática e Inglês

QUESTÃO 1

Considere os três operadores matemáticos #, Δ e $\square$ tais que $a \# b = a^b$, $a \Delta b = \frac{a}{b}$ e $a \square b \square c = a + b + c$. Sabendo que 'x' é um número real, pode-se afirmar que o valor máximo inteiro que a expressão $[2(x \# 2) \square 8x \square 23] \Delta [2(x \# 2) \square 8x \square 11]$ assume é:

- (A) 7
- (B) 6
- (C) 5
- (D) 4
- (E) 3

Resolução:

Repare que os três operadores matemáticos #, Δ e $\square$ representam **potenciação**, **divisão** e **soma**.

Assim, a expressão $[2(x \# 2) \square 8x \square 23] \Delta [2(x \# 2) \square 8x \square 11]$ equivale a:

$$[2(x \# 2) \square 8x \square 23] \Delta [2(x \# 2) \square 8x \square 11] =$$

$$[2x^2 + 8x + 23] \div [2x^2 + 8x + 11] =$$

$$\frac{2x^2 + 8x + 23}{2x^2 + 8x + 11} = 1 + \frac{12}{2x^2 + 8x + 11}$$

Para obtermos o valor máximo da expressão, precisamos que a expressão

$\frac{12}{2x^2 + 8x + 11}$ seja máxima, o que implica que o denominador $2x^2 + 8x + 11$ seja mínimo. Para tal, basta obtermos o vértice da abscissa x e aplicarmos na função, isto é, $x_v = -8/4 = -2 \Rightarrow y_v = 2 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2) + 11 = 3$.

Assim, o valor máximo de $\frac{2x^2+8x+23}{2x^2+8x+11}$ corresponde a $1 + \frac{12}{3} = 1 + 4 = 5$.

Resposta: C

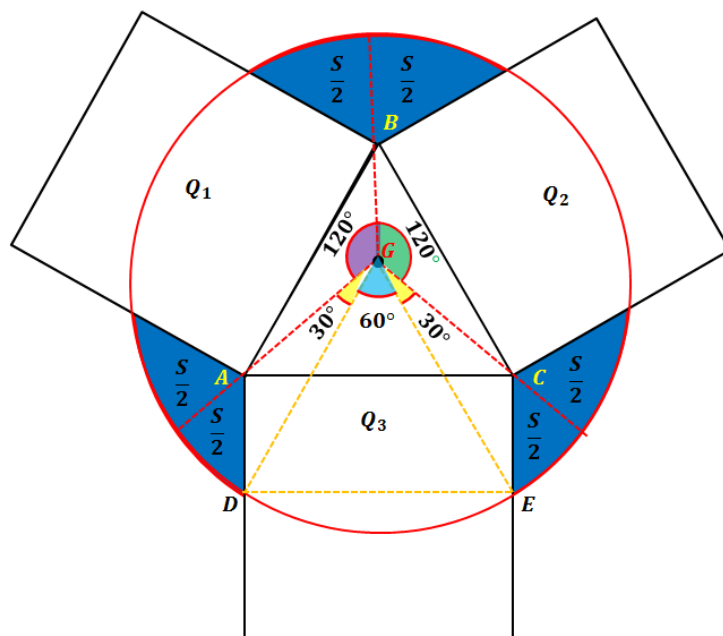
QUESTÃO 2

Seja ABC um triângulo equilátero de lado 3. Exteriormente ao triângulo, constroem-se três quadrados, sempre a partir de um lado do triângulo ABC, ou seja, no quadrado Q_1 , AB é um lado; no Q_2 , BC é um lado; e no Q_3 , AC é um lado. Com centro no baricentro "G" do triângulo ABC, traça-se um círculo de raio 3. A medida da área da parte do círculo que não pertence a nenhum dos quadrados Q_1 , Q_2 e Q_3 , e nem ao triângulo ABC é igual a:

- (A) 2π
- (B) 3π
- (C) 5π
- (D) 7π
- (E) 12π

(RECURSO)

Resolução:



Perceba que as três semi-retas que partem do baricentro passando pelos vértices e cortando a circunferência, divide-a em três partes iguais. Com isso, os ângulos centrais valem $360^\circ/3 = 120^\circ$.

Note ainda que o triângulo GDE é equilátero, pois $GD = GE = 3$ e $DE = AC = 3$. Portanto, $GD = GE = DE = 3$.

Além disso, os ângulos $D\hat{G}A$ e $E\hat{G}C$ são iguais a $(120^\circ - 60^\circ)/2 = 30^\circ$.

Repare que a área do setor circular relacionado ao triângulo DGA, pode ser decomposto em função de $\frac{S}{2}$ e do triângulo DGA, ou seja:

$$\frac{30^\circ}{360} \cdot \pi \cdot 3^2 = \frac{S}{2} + S_{\Delta DGA} \Leftrightarrow$$

$$\frac{3\pi}{4} = \frac{S}{2} + \frac{AG \times DG \times \text{Sen}(30^\circ)}{2}$$

Veja que AG vale 2/3 da altura do triângulo equilátero ABC, isto é:

$$AG = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Continuando, teremos:

$$\frac{3\pi}{4} = \frac{S}{2} + \frac{AG \times DG \times \text{Sen}(30^\circ)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{3\pi}{4} = \frac{S}{2} + \frac{\sqrt{3} \times 3 \times \frac{1}{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{3\pi}{4} = \frac{S}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4} \rightarrow$$

$$\frac{3\pi}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{S}{2} \rightarrow$$

$$\frac{3\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = S$$

Veja que a medida da área da parte do círculo que não pertence a nenhum dos quadrados Q_1 , Q_2 e Q_3 , nem ao triângulo ABC é igual a:

$$3.S = \frac{9\pi}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

Observe que não há alternativa correspondente a essa resposta, assim roga-se pela anulação da questão.

QUESTÃO 3

Considere as afirmações a seguir.

- I- Seja P o conjunto dos números naturais pares positivos $P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$. A soma de parcelas distintas, formada pelos inversos dos elementos de P , desde 2 até ' m ', com $m \in P$, terá como resultado um número inteiro.
- II- Se x é um número real e $x < 0$, então $\sqrt{x^2} = -x$.
- III- A medida da corda determinada por uma reta numa circunferência é menor ou igual à medida do seu diâmetro.

Essas afirmações são, respectivamente:

- (A) Falsa - Falsa - Verdadeira
- (B) Verdadeira - Falsa - Verdadeira
- (C) Falsa - Falsa - Falsa
- (D) Falsa - Verdadeira - Verdadeira
- (E) Verdadeira - Verdadeira - Verdadeira

Resolução:

Item I. Podemos contra argumentar usando um exemplo da soma $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Repare que esse resultado não é um número inteiro. Portanto, assertiva FALSA.

Item II. Repare que $\sqrt{x^2} = |x|$, caso $x < 0$, então $\sqrt{x^2} = |x| = -x$. VERDADEIRA.

Item III. De fato, a corda máxima determinada por uma reta em uma circunferência equivale ao diâmetro. Portanto, qualquer corda determinada por uma reta numa circunferência tem medida inferior ou igual ao diâmetro da mesma. VERDADEIRA

Essas afirmações são respectivamente Falsa – Verdadeira – Verdadeira.

Resposta: D

QUESTÃO 4

Os elementos do conjunto X são números naturais distintos formados apenas por algarismos iguais a 1, ou seja, $X = \{1, 11, 111, 1111, 11111, \dots\}$, onde o maior elemento é formado por 2018 algarismos iguais a 1. Sabendo que $111111 = 15873 \times 7$, determine a quantidade de elementos do conjunto X que são divisíveis por 7 e marque a opção correta.

- (A) 128
- (B) 256
- (C) 336
- (D) 446
- (E) 512

Resolução:

Perceba o seguinte padrão:

$$1 = 0 \times 7 + 1$$

$$11 = 1 \times 7 + 4$$

$$111 = 15 \times 7 + 6$$

$$1.111 = 158 \times 7 + 5$$

$$11.111 = 1587 \times 7 + 2$$

$$111.111 = 15873 \times 7 + 0$$

...

Perceba que o ciclo se repetirá quando tivermos MAIS 6 algarismos "1" reunidos. Com isso, podemos perceber que os números divisíveis por 7, tendo em sua composição apenas o algarismo "1" são:

$$\mathbf{111.111} \rightarrow \text{divisível por 7}$$

$$\mathbf{111.111.111.111} \rightarrow \text{divisível por 7}$$

$$\mathbf{111.111.111.111.111.111} \rightarrow \text{divisível por 7}$$

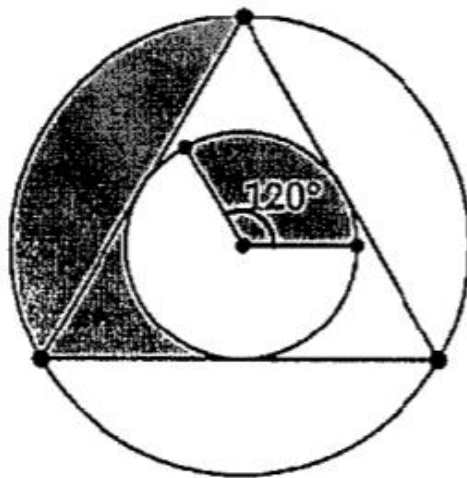
Deste modo, o número cuja composição de algarismo "1" é divisível por 7 e está muito próximo do número de 2018 algarismos iguais "1" é o número de 2016 algarismos iguais a "1", pois 2018 algarismos "1" agrupados de 6 em 6 resulta em 336 grupos de 6 algarismos e ainda sobra 2 algarismos 1.

Podemos então perceber que dentro do conjunto X, os números que são divisíveis por 7 tem uma quantidade de algarismos "1" que é múltipla de 6, variando de **1 grupo** de 6 algarismos "1" a **336 grupos** de 6 algarismos "1". ou seja, no Conjunto X, temos 336 grupos de números de 6 algarismos equivalente a 1, ou melhor, **336 números**.

Resposta: C

QUESTÃO 5

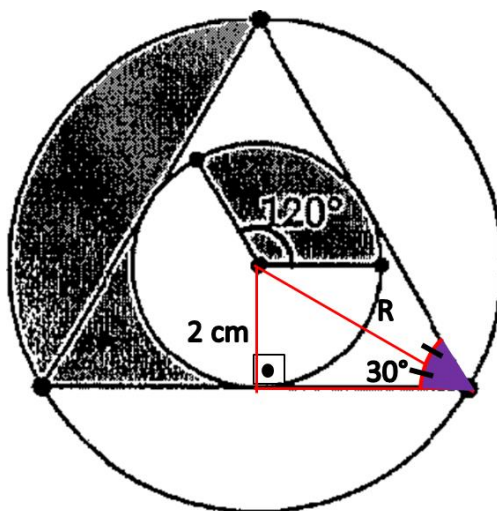
Observe a figura a seguir.



Essa figura representa um triângulo equilátero, inscrito numa circunferência maior, e circunscrito a uma outra circunferência menor de raio igual a 2cm, onde destacou-se a região com ângulo central de 120° . Sendo assim, é correto afirmar que a área total correspondente à parte sombreada mede, em cm^2 :

- (A) $\frac{10\pi}{3}$
- (B) $\frac{15\pi}{4}$
- (C) $\frac{16\pi}{3}$
- (D) $\frac{17\pi}{5}$
- (E) $\frac{13\pi}{3}$

Resolução



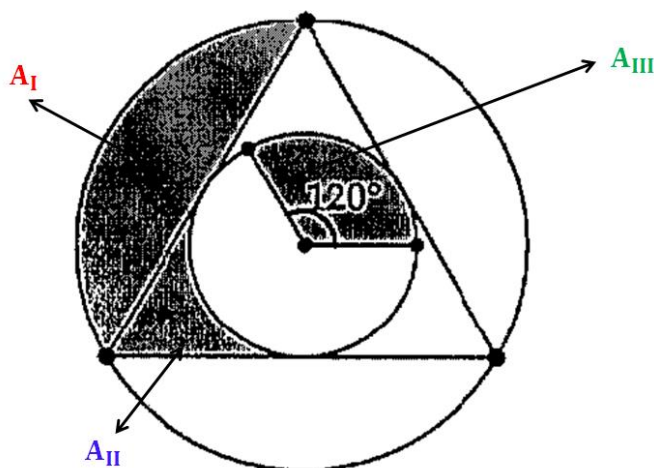
Podemos usar as relações trigonométricas para calcular o raio R da circunferência maior, da seguinte forma:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{2}{R} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{R} \rightarrow$$

$$R = 4$$

Podemos dividir as áreas da figura conforme segue:



Podemos observar o seguinte:

$$\rightarrow A_I = \frac{\text{Área Círc. Maior} - \text{Área}_\Delta}{3}$$

$$\rightarrow A_{II} = \frac{\text{Área}_\Delta - \text{Área Círc. Menor}}{3}$$

$$\rightarrow A_{III} = \frac{120}{360} \times \text{Área Círc. Menor} = \frac{\text{Área Círc. Menor}}{3}$$

Com isso, podemos concluir que a área total correspondente à parte sombreada equivale à soma das áreas A_I , A_{II} e A_{III} . Isto é:

$$A_I + A_{II} + A_{III} = \frac{\text{Área Círc. Maior} - \text{Área}_{\Delta}}{3} + \frac{\text{Área}_{\Delta} - \text{Área Círc. Menor}}{3} + \frac{\text{Área Círc. Menor}}{3} \Leftrightarrow$$

$$A_I + A_{II} + A_{III} = \frac{\text{Área Círc. Maior}}{3} \Leftrightarrow$$

$$A_I + A_{II} + A_{III} = \frac{\pi \cdot R^2}{3} \Leftrightarrow$$

$$A_I + A_{II} + A_{III} = \frac{\pi \cdot 4^2}{3} \Leftrightarrow$$

$$A_I + A_{II} + A_{III} = \frac{16\pi}{3}$$

Resposta: C

QUESTÃO 6

O maior valor inteiro de 'k' para que $x^2 + 2018x + 2018k = 0$ tenha soluções reais é:

- (A) 2018
- (B) 1010
- (C) 1009
- (D) 505
- (E) 504

Resolução:

Para uma função do 2º grau do tipo " $ax^2 + bx + c$ " ter raízes reais, o discriminante deve ser pelo menos igual a zero. Ou seja:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c \geq 0$$

$$\Delta = 2018^2 - 4.1.(2018k) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$2018 \times (2018 - 4k) \geq 0 \text{ ----multiplicamos por } 1/2018$$

$$2018 - 4k \geq 0 \rightarrow$$

$$- 4k \geq - 2018 \text{ --- multiplicamos por } (-1)$$

$$4k \leq 2018 \rightarrow$$

$$k \leq 2018/4 \Leftrightarrow$$

$$k \leq 2018/4 \Leftrightarrow$$

$$k \leq 504,5$$

O maior inteiro inferior a 504,5 é 504.

Resposta: E

QUESTÃO 7

Seja A o conjunto formado pelos pares (x,y) , onde x e y são inteiros positivos tais que $2x+3y = 2018$. Sendo assim, é correto afirmar que a quantidade de elementos do conjunto A é:

- (A) 256
- (B) 336
- (C) 512
- (D) 640
- (E) 720

Resolução:

Uma vez que a expressão $2x + 3y = 2018$, onde x e y são números inteiros positivos, então podemos concluir que cada parcela da expressão é sempre inferior ao total da soma, ou seja:

$$2x < 2018 \rightarrow x < 1009 \wedge 3y < 2018 \rightarrow y < 672,66$$

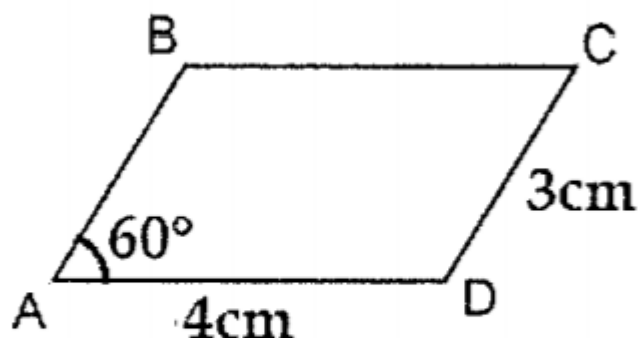
Além disso, note que y é um número par, já que $y = 2 \cdot [(1009 - x)/3]$

Assim, $y \in \{2, 4, 6, \dots, 672\} = 2 \times \{1, 2, 3, \dots, 336\}$ e como y tem correspondência com x, isto é, temos um par ordenado $(x, y) \in A$ de inteiros, então, ao todo, teremos **336 pares** ordenados em A.

Resposta: B

QUESTÃO 8

Analise a figura a seguir.



Essa figura representa o paralelogramo ABCD, cujas medidas dos lados são $AB=CD=3\text{cm}$, $BC=AD=4\text{cm}$ e $\hat{A}=60^\circ$. Do vértice D traça-se a altura DH relativa ao lado AB, que encontra a diagonal AC no ponto I. Determine, em cm, a medida DI e marque a opção correta.

(A) $\frac{6\sqrt{3}}{5}$

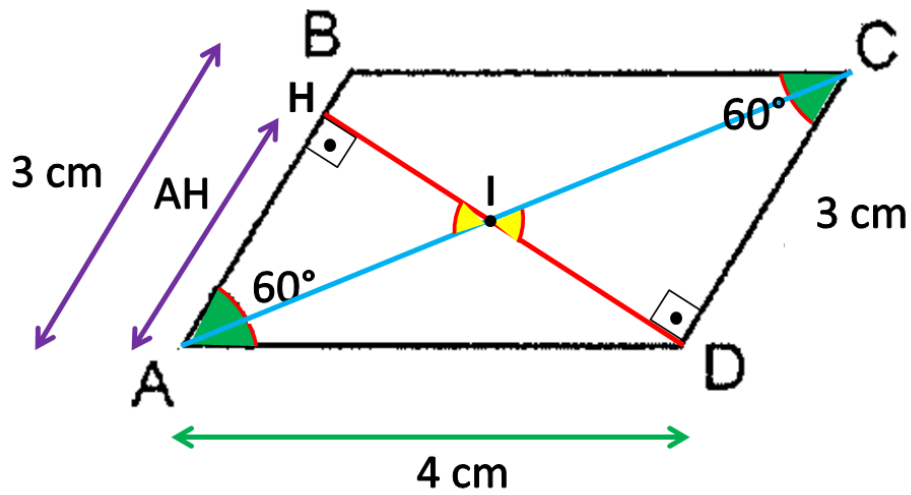
(B) $\frac{7}{3}$

(C) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

(D) $\frac{9}{5}$

(E) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

Resolução:



Repare que no triângulo ADH, temos o seguinte:

$$\rightarrow \sin(60^\circ) = \frac{DH}{AD} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{DH}{4} \rightarrow DH = 2\sqrt{3}$$

E

$$\rightarrow \cos(60^\circ) = \frac{AH}{AD} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} = \frac{AH}{4} \rightarrow AH = 2$$

Os triângulos AIH e DIC são semelhantes, logo teremos a seguinte proporção:

$$\frac{IH}{DI} = \frac{AH}{CD} \Leftrightarrow$$

$$\frac{IH}{DI} = \frac{2}{3} \rightarrow$$

$$\frac{IH + DI}{DI} = \frac{2 + 3}{3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{DH}{DI} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{DI} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow$$

$$6\sqrt{3} = 5 \cdot DI \rightarrow$$

$$DI = \frac{6\sqrt{3}}{5}$$

Resposta: A

QUESTÃO 9

As equações na incógnita 'x' dadas por $ax + b = 0$ e $ax^2 + bx + c = 0$, onde 'a', 'b' e 'c' são números reais e $a \neq 0$, possuem uma única raiz em comum. Sabendo que 'm' e 'n' são as raízes da equação do 2º grau, marque a opção que apresenta o valor da soma $m^{2018} + n^{2018}$.

(A) $\left(\frac{c}{b}\right)^{2018}$

(B) $\left(\frac{ab}{c}\right)^{2018}$

(C) $\left(\frac{c}{a}\right)^{2018}$

(D) $\left(\frac{bc}{a}\right)^{2018}$

(E) $\left(\frac{b}{a}\right)^{2018}$

Resolução:

Repare que na equação de 1º grau $ax + b = 0$, a raiz é dada por:

$$ax + b = 0 \rightarrow$$

$$ax = -b$$

$$x = -b/a$$

Perceba que a soma das raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ pode ser calculada da seguinte forma:

$$x_1 + x_2 = -b/a \Leftrightarrow$$

Ocorre que uma das raízes vale “- b/a”. Assim, podemos encontrar a segunda raiz, isto é:

$$x_1 + x_2 = -b/a \Leftrightarrow$$

$$-b/a + x_2 = -b/a \rightarrow$$

$$x_2 = 0$$

O enunciado da questão informa que m e n são as raízes da equação de 2º grau. Com isso, o valor da expressão $m^{2018} + n^{2018}$ equivale a:

$$(0)^{2018} + \left(-\frac{b}{a}\right)^{2018} = \left(\frac{b}{a}\right)^{2018}$$

Resposta: E

QUESTÃO 10

Considere a expressão $(2018^{2018})^{2018}$, que é potência de uma potência. É correto afirmar que o último algarismo do resultado dessa expressão é:

- (A) 0
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 6
- (E) 8

Resolução:

Podemos determinar os algarismos das unidades do número em forma de potência de $(\dots 8)^n$, quando temos um expoente natural n.

Repare que:

$$\text{Para } n = 1 \rightarrow (\dots 8)^1 = \dots 8$$

$$\text{Para } n = 2 \rightarrow (\dots 8)^2 = \dots 4$$

$$\text{Para } n = 3 \rightarrow (\dots 8)^3 = \dots 2$$

$$\text{Para } n = 4 \rightarrow (\dots 8)^4 = \dots 6$$

Veja que para $n = 5$, surgirá um padrão de repetição, onde os algarismos das unidades do resultado da potência pertencerão à sequência de termos repetitivos (8, 4, 2, 6, ...)

Podemos concluir que a terminação de $(2018^{2018})^{2018}$ será o termo de posição "2018 x 2018" na sequência (8, 4, 2, 6, ...).

Note que $2018 \times 2018 = (2 \times 1009) \times (2 \times 1009) = 4 \times 1009^2$, sendo um múltiplo de 4, então sua terminação será 6.

Resposta: D

QUESTÃO 11

Sejam os números naturais 'm' e 'n', tais que $0 < m \leq 2018$ e $n = \sqrt{m - \sqrt{m^2 - 49}}$. Dentre as opções a seguir, marque a que apresenta o resultado de $10^n m$.

- (A) 250
- (B) 360
- (C) 380
- (D) 420
- (E) 540

Resolução:

Repare que temos a seguinte expressão $n = \sqrt{m - \sqrt{m^2 - 49}}$, manipulando algebricamente, teremos:

$$n = \sqrt{m - \sqrt{m^2 - 49}} \rightarrow$$

$$n^2 = m - \sqrt{m^2 - 49} \rightarrow$$

$$\sqrt{m^2 - 49} = m - n^2 \rightarrow$$

$$m^2 - 49 = (m - n^2)^2 \Leftrightarrow$$

$$m^2 - 49 = m^2 - 2.m.n^2 + n^2 \rightarrow$$

$$-49 = -2.m.n^2 + n^2 \text{ ---- multiplicamos por } (-1)$$

$$49 = 2.m.n^2 - n^2 \Leftrightarrow$$

$$49 = n^2.(2.m - n^2)$$

$$\frac{49}{n^2} = 2.m - n^2$$

Veja que o enunciado nos informa que "m" e "n" são números naturais, de modo que a expressão " $2.m - n^2$ " um número inteiro, o que implica em n^2 ser divisor de 49. Ou seja, $n \in \{1, 7\}$.

Vamos então entrar possíveis valores para m, quando $n = 1$ ou $n = 7$. Da seguinte maneira:

$$\rightarrow \text{Para } n = 1: \frac{49}{1^2} = 2.m - 1^2 \rightarrow m = 25.$$

$$\rightarrow \text{Para } n = 7: \frac{49}{7^2} = 2.m - 7^2 \rightarrow m = 25.$$

Perceba que teremos sempre **m = 25**. Vamos substituir $m = 25$ na expressão original:

$$n = \sqrt{m - \sqrt{m^2 - 49}} \rightarrow$$

$$n = \sqrt{25 - \sqrt{25^2 - 49}} \Leftrightarrow$$

$$n = \sqrt{25 - \sqrt{625 - 49}} \Leftrightarrow$$

$$n = \sqrt{25 - \sqrt{576}} \Leftrightarrow$$

$$n = \sqrt{25 - 24} \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{n = 1}$$

Portanto, temos unicamente **n = 1 e m = 25**. Substituindo em $10^n.m$, teremos:

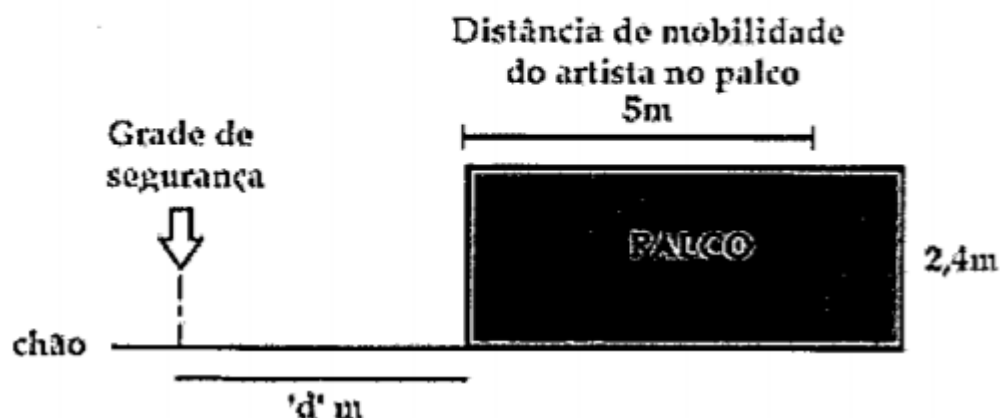
$$10^n.m \rightarrow$$

$$10^1.25 = 250$$

Resposta: A

QUESTÃO 12

Observe a figura a seguir.



Ela exibe um esboço da visão lateral do projeto de construção de um palco para um evento na cidade de Angra dos Reis. Para simplificar, o projeto irá considerar que a altura de uma pessoa é 1,6m. Do chão ao piso do palco terá 2,4m de altura e os 5m em destaque no palco é a região em que um artista, em pé, pode se deslocar durante seu show. A grade de segurança é colocada a uma distância 'd' do palco de modo que uma pessoa, em pé, encostada nessa grade, consiga ver ao menos a metade da altura do artista, em qualquer lugar dos 5m destacados no palco, se o artista estiver também de pé. Nessas condições, o valor de 'd' está no intervalo:

- (A) $0 < d \leq 2$
- (B) $2 < d \leq 4$
- (C) $4 < d \leq 6$
- (D) $6 < d \leq 8$
- (E) $8 < d \leq 10$

Resolução:

Resposta:

QUESTÃO 13

Um fazendeiro possui 'x' galinhas e ração estocada suficiente para 'n' dias. Sabe-se que cada galinha consome a mesma quantidade de ração diariamente. No final de 't' dias ($1 < t < n$), o fazendeiro adquire outras 'k' galinhas, sendo que cada nova galinha consome o triplo da ração diária que uma das 'x' galinhas anteriores consome. Supondo que não houve renovação no estoque de ração e que, além de alimentar todas as galinhas conforme suas necessidades diárias, nenhuma foi retirada do galinheiro, marque a opção cuja sentença permite obter a quantidade de dias 'y' que faltam para acabar o estoque atual de ração deste fazendeiro.

- (A) $(3k + 1)y = n - t$
- (B) $(3k + 1)y = 2n - t$
- (C) $(2k + 3)y = 3n - t$
- (D) $(2k + 1)y = 3n - t$
- (E) $(3k + 3)y = 2n - t$

(RECURSO)

Resolução:

Repare que x galinhas consome um estoque 'E' de ração por n dias.

Veja que após 't' dias, onde $1 < t < n$, x galinhas consumiram uma fração do estoque, ou seja, $\frac{t}{n} \cdot E$, sobrando de estoque o correspondente a $E - \frac{t}{n} \cdot E$.

Além disso, o fazendeiro adquire mais 'k' galinhas, onde cada uma dessas consomem o triplo da qualquer uma das 'x' galinhas. Podemos concluir então que esse acréscimo equivale a 3.k galinhas das anteriores, totalizando $(x + 3k)$ galinhas.

Agora, podemos questionar qual o tempo restante 'y' em que $(x + 3k)$ galinhas esgotam o estoque $E - \frac{t}{n} \cdot E$. Com isso, podemos montar a seguinte regra de três composta:

Galinhas	Dias	Estoque
x	t	$\frac{t}{n} \cdot E$
$(x + 3.k)$	y	$E - \frac{t}{n} \cdot E$

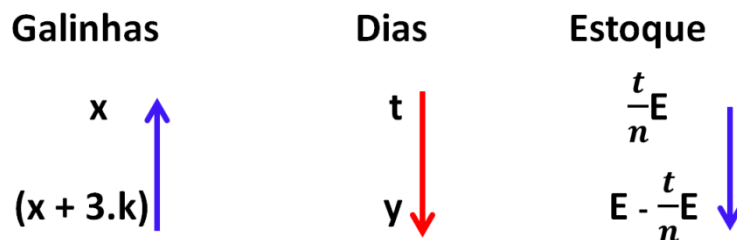
Note que:

→ quanto MAIOR for a quantidade de galinhas, MENOR será o número de Dias em que se esgotará o estoque.

→ quanto MENOR for estoque, MENOR será o número de Dias em que se esgotará o estoque.

Deste modo, em relação ao número de Dias, as grandezas Galinhas e Estoque são inversamente e diretamente proporcionais, respectivamente.

Dessa forma, obteremos:



Montando as expressões:

$$\frac{t}{y} = \frac{(x + 3k)}{x} \cdot \frac{\frac{t}{n} \cdot E}{\left(E - \frac{t}{n} \cdot E\right)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{t}{y} = \frac{(x + 3k)}{x} \cdot \frac{\frac{t}{n} \cdot E}{\left(\frac{n-t}{n}\right) \cdot E} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{y} = \frac{(x + 3k)}{x} \cdot \frac{1}{n - t} \Leftrightarrow$$

$$(3k + x) \cdot y = (n - t) \cdot x$$

Essa é a expressão em que é possível obtermos a quantidade de dias 'y', em relação ao total de galinhas após o acréscimo.

Todavia, o gabarito preliminar apresenta a alternativa A como resposta, mostrando a expressão " $(3k + 1) \cdot y = n - t$ ".

Note que isto é possível quando $x = 1$, ou seja, é a expressão em que possibilita obter a quantidade de dias 'y', em relação a uma única galinha após o acréscimo. Sendo que isto não é o objetivo que o enunciado traz.

Assim, rogamos pela anulação da questão.

Resposta: ANULAÇÃO

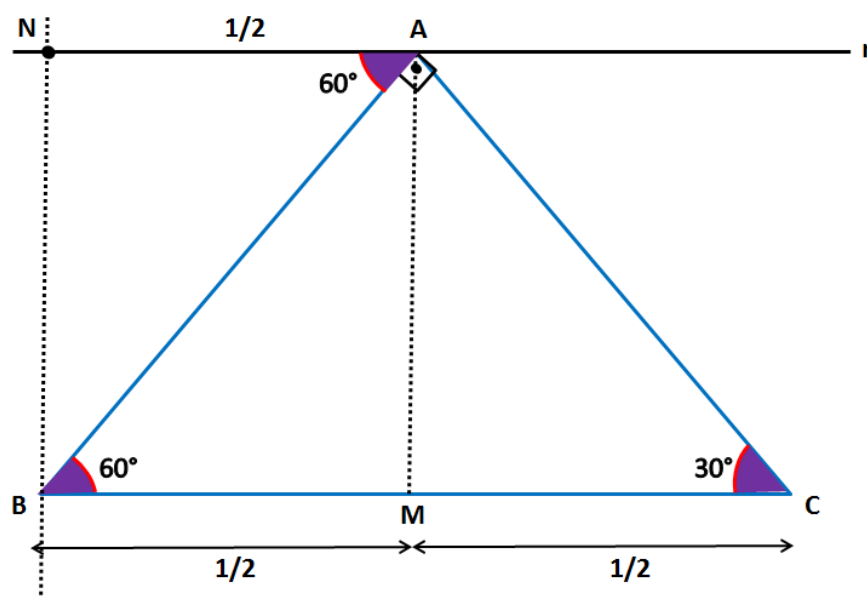
QUESTÃO 14

Um triângulo retângulo ABC é reto no vértice A, o ângulo C mede 30° , a hipotenusa BC mede 1cm e o segmento AM é a mediana relativa à hipotenusa. Por um ponto N, exterior ao triângulo, traçam-se os segmentos BN e NA, com $BN \parallel AM$ e $NA \parallel BM$. A área, em cm^2 , do quadrilátero ANBC é:

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{16}$
- (B) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$
- (C) $\frac{\sqrt{3}}{8}$
- (D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
- (E) $\frac{3\sqrt{3}}{16}$

Resolução:

Conforme o enunciado, temos a seguinte construção geométrica:



Veja que $\cos 60^\circ = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{AB}{1} \rightarrow AB = \frac{1}{2}$.

Repare que podemos calcular a área do quadrilátero ANBC em função das áreas dos triângulos ANB e ABC. Ou seja:

$$\begin{aligned} S_{ANBC} &= S_{\triangle ANB} + S_{\triangle ABC} \Leftrightarrow \\ S_{ANBC} &= \frac{AN \times AB \times \sin(60^\circ)}{2} + \frac{AB \times BC \times \sin(60^\circ)}{2} \Leftrightarrow \\ S_{ANBC} &= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} + \frac{\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \Leftrightarrow \\ S_{ANBC} &= \frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow \\ S_{ANBC} &= \frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{2\sqrt{3}}{16} \Leftrightarrow \\ S_{ANBC} &= \frac{3\sqrt{3}}{16} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Resposta: E

QUESTÃO 15

A quantidade de soluções inteiras da inequação

$$\frac{1}{x^2-4} + \frac{2}{x+2} \geq 1 \text{ é:}$$

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 2
- (D) 3
- (E) 4

Resolução:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2-4} + \frac{2}{x+2} &\geq 1 \Leftrightarrow \\ \frac{1}{x^2-4} + \frac{2}{x+2} - 1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Repare que $\frac{2}{x+2} = \frac{2}{x+2} \cdot \frac{x-2}{x-2} = \frac{2x-4}{x^2-4}$ e $1 = \frac{x^2-4}{x^2-4}$. Com isso, teremos:

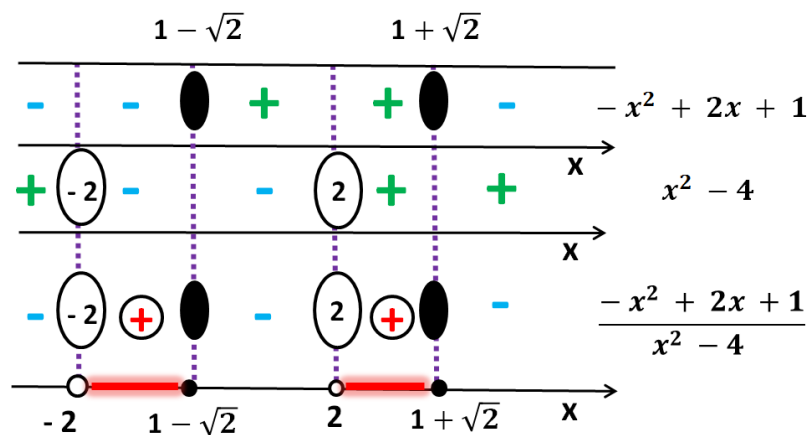
$$\frac{1}{x^2 - 4} + \frac{2}{x + 2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{x^2 - 4} + \frac{2x - 4}{x^2 - 4} - \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1 + (2x - 4) - (x^2 - 4)}{x^2 - 4} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-x^2 + 2x + 1}{x^2 - 4} \geq 0 \Leftrightarrow$$

Interpretando graficamente as funções “ $-x^2 + 2x + 1$ ” e “ $x^2 - 4$ ”, por meio de suas raízes, temos:



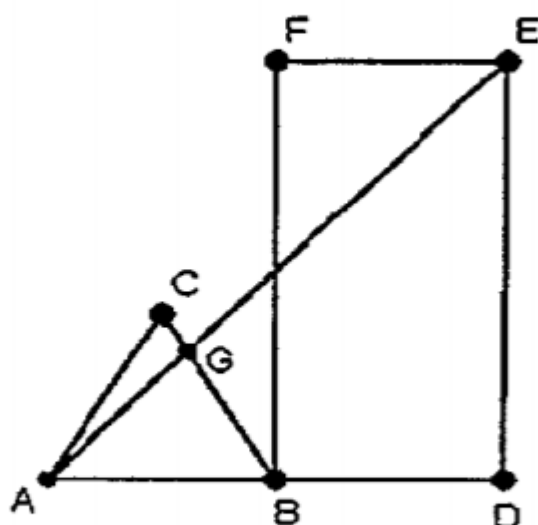
Aproximando $\sqrt{2}$ para 1,4, podemos perceber que a quantidade de números inteiros entre -2 e $1 - \sqrt{2}$ é apenas um, que no caso é o -1 . Já entre o número 2 e $\sqrt{2}$ temos 0 números inteiros.

Assim, ao todo, no conjunto solução da inequação supra, temos exatamente 1 número inteiro.

Resposta: B

QUESTÃO 16

Observe a figura a seguir.



O triângulo ABC acima é equilátero de lado igual a 2cm. BDEF é um retângulo de medidas 2cm x 5cm. Além disso, A, B e D estão alinhados. Sendo assim, é correto afirmar que a medida do segmento GB, em centímetros, é:

(A) $\frac{20}{5+4\sqrt{3}}$

(B) $\frac{11}{4+2\sqrt{3}}$

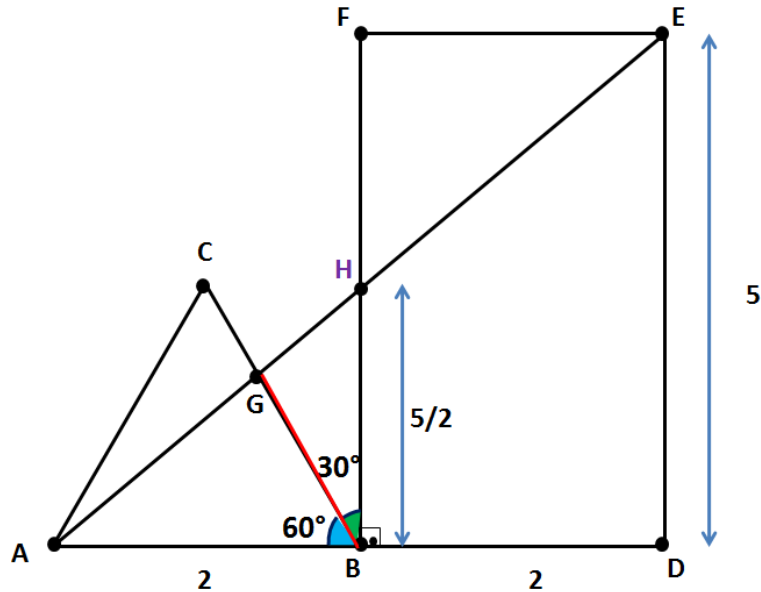
(C) $\frac{8}{3+\sqrt{3}}$

(D) $\frac{15}{5+2\sqrt{3}}$

(E) $\frac{13}{4+5\sqrt{3}}$

Resolução:

Podemos incrementar o seguinte:



Repare o seguinte:

→ O ângulo $\widehat{GBH}$ equivale a $180^\circ - \widehat{GBA} - \widehat{HBD} = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ$.

→ O ponto B é ponto médio AD assim como H é o ponto médio de AE e BF.
Deste modo, $HB = FB/2 = ED/2 = 5/2$.

Repare que podemos calcular a área do triângulo ABC em função do lado GB ou dos lados AB e BH, isto é:

$$\begin{aligned}
 S_{\Delta ABH} &= S_{\Delta ABG} + S_{\Delta BGH} \Leftrightarrow \\
 S_{\Delta ABH} &= \frac{\text{GB} \times AB \times \sin(60^\circ)}{2} + \frac{\text{GB} \times BH \times \sin(30^\circ)}{2} \Leftrightarrow \\
 S_{\Delta ABH} &= \frac{\text{GB} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} + \frac{\text{GB} \times \frac{5}{2} \times \frac{1}{2}}{2} \Leftrightarrow \\
 S_{\Delta ABH} &= \text{GB} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{8} \right) \Leftrightarrow \\
 S_{\Delta ABH} &= \text{GB} \cdot \left(\frac{4\sqrt{3}}{8} + \frac{5}{8} \right) \Leftrightarrow \\
 S_{\Delta ABH} &= \text{GB} \cdot \left(\frac{4\sqrt{3} + 5}{8} \right) \Leftrightarrow \\
 S_{\Delta ABH} &= \text{GB} \cdot \left(\frac{4\sqrt{3} + 5}{8} \right)
 \end{aligned}$$

Veja que também temos $S_{\Delta ABH} = \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{2} = \frac{5}{2}$. Igualando as expressões, teremos:

$$S_{\Delta ABH} = \text{GB} \cdot \left(\frac{4\sqrt{3} + 5}{8} \right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{5}{2} = \text{GB} \cdot \left(\frac{4\sqrt{3} + 5}{8} \right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{40}{2 \cdot (4\sqrt{3} + 5)} = \text{GB} \Leftrightarrow$$

$$\frac{20}{1 \cdot (4\sqrt{3} + 5)} = \text{GB} \Leftrightarrow$$

$$\frac{20}{5 + 4\sqrt{3}} = \text{GB}$$

Resposta: A

QUESTÃO 17

Seja ABCD um quadrado de lado L , em que AC é uma de suas diagonais. Na semirreta BC, onde B é a origem, marca-se E de tal modo que $BC = CE$. Seja H a circunferência de centro em C e raio L , e P o ponto de interseção de AE com a circunferência H. Sendo assim, é correto afirmar que o segmento DP tem medida igual a:

(A) $\frac{L\sqrt{10}}{5}$

(B) $\frac{3L\sqrt{10}}{10}$

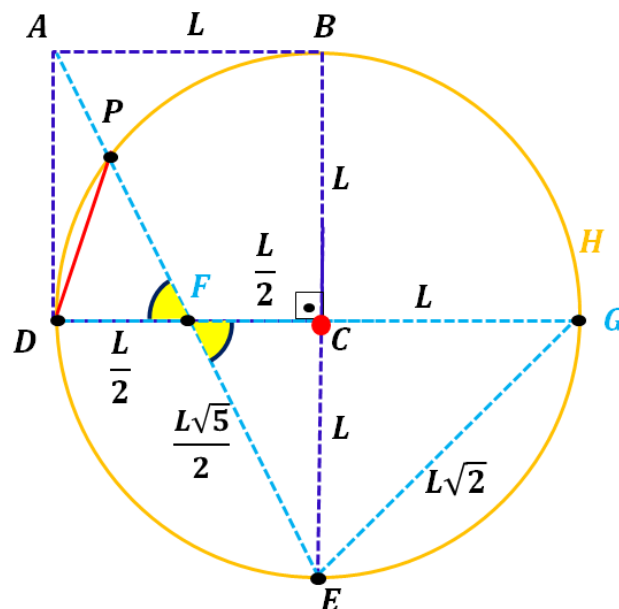
(C) $\frac{2L\sqrt{5}}{5}$

(D) $\frac{2L\sqrt{10}}{5}$

(E) $\frac{L\sqrt{5}}{10}$

Resolução:

Segue a construção geométrica, conforme o enunciado da questão:



Note que os triângulos CEF e BEA são semelhantes, onde C e F são os pontos médios de EB e CD. Com isso, $FC = DC/2 = L/2$.

Repare que os triângulos CEF e GCE são retângulos, onde podemos extrair a relação pitagórica, ou seja:

$$\mathbf{F}\mathbf{E}^2 = \mathbf{C}\mathbf{E}^2 + \mathbf{F}\mathbf{C}^2 \Leftrightarrow$$

$$FE^2 = L^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \rightarrow FE = \frac{L\sqrt{5}}{2}$$

E

$$GE^2 = CE^2 + CG^2 \Leftrightarrow$$

$$GE^2 = L^2 + L^2 \rightarrow GE = L\sqrt{2}$$

Veja que os triângulos FDP e FEG são semelhantes. Assim, temos as seguintes proporções:

$$\frac{FD}{FE} = \frac{DP}{GE} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\frac{L}{2}}{\frac{L\sqrt{5}}{2}} = \frac{DP}{L\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{DP}{L\sqrt{2}} \rightarrow$$

$$\frac{L\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = DP \Leftrightarrow$$

$$\frac{L\sqrt{2} \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = DP \Leftrightarrow$$

$$\frac{L\sqrt{10}}{5} = DP$$

Resposta: A

QUESTÃO 18

Considere os dois números naturais 'a' e 'b', ambos formados por dois algarismos. Sabe-se que $a \cdot b = 2160$ e que o máximo divisor comum de 'a' e 'b' é 12. Sendo assim, é correto afirmar que, ao se dividir a diferença positiva entre 'a' e 'b' por 11, encontra-se resto igual a:

- (A) 9
- (B) 6
- (C) 5
- (D) 2
- (E) 1

Resolução:

Note que temos:

$$\begin{cases} (I): a \cdot b = 2160 \\ (II): \text{mdc}(a, b) = 12 \end{cases}$$

Veja que 12 é o máximo divisor comum de a e b. com isso, dados 'm' e 'n' números inteiros, então teremos $a = 12 \cdot m$ e $b = 12 \cdot n$.

Substituindo essas novas expressões em (II), temos:

$$a \cdot b = 2160 \Leftrightarrow$$

$$(12 \cdot m) \cdot (12 \cdot n) = 2160 \rightarrow$$

$$m \cdot n = 2160/144 \Leftrightarrow$$

$$m \cdot n = 15$$

Uma vez que m e n são números inteiros, então $m, n \in \{1, 3, 5, 15\}$.

Repare que $\{m, n\} = \{1, 15\}$ ou $\{m, n\} = \{3, 5\}$, pois o produto $m \cdot n$ resulta em 15. Além disso, se m ou n for 15, então a ou b será $12 \times 15 = 180$, tendo três algarismos irá contrariar o enunciado. Assim, o par de valores que atende ao enunciado é $\{m, n\} = \{3, 5\}$.

Portanto, teremos:

$$\{m, n\} = \{3, 5\} \rightarrow$$

$$\{12m, 12n\} = \{36, 60\} \Leftrightarrow$$

$$\{a, b\} = \{36, 60\}$$

Note que a diferença positiva é dada por $(60 - 36) = 24$. Esse resultado quando dividido por 11 deixa resto 2. Ou seja, $24 = 2 \times 11 + 2$.

Resposta: D

QUESTÃO 19

A idade de cada um dos três filhos de um adulto, incluindo os dois filhos gêmeos, é representada por números inteiros. A soma das idades é igual a 21 e o produto igual a 320. Se colocarmos em forma de potência a maior idade e a menor idade deles, de tal modo que a maior seja a base da potência e a menor seja o expoente, está correto afirmar que ela terá o mesmo resultado do que:

(A) 3^{10}

(B) 5^9

(C) 2^{13}

(D) 3^8

(E) 2^{15}

Resolução:

Seja x a idade dos dois irmãos gêmeos e y a idade do irmão não-gêmeo.

Conforme o enunciado, a soma das idades dos três vale 21 anos e o produto, 320. Ou seja:

$$\begin{cases} (I): 2x + y = 21 \\ (II): x^2 y = 320 \end{cases}$$

Da relação (II), podemos extrair o seguinte:

$$x^2 y = 320 \rightarrow$$

$$y = \frac{320}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$y = \left(\frac{8}{x}\right)^2 \cdot 5$$

Repare que sendo x e y números inteiros positivos, então x deve ser divisor positivo de 8. Ou seja, $x \in \{2, 4, 8\}$.

Note que o seguinte:

$\rightarrow$ para $x = 2$, então $y = \left(\frac{8}{2}\right)^2 \cdot 5 = 80$, mas como $2x + y = 21$, o que implica em $y < 21$. Logo, $x \in \{4, 8\}$.

→ para $x = 4$, então $y = \left(\frac{8}{4}\right)^2 \cdot 5 = 20$, fique em alerta ao caso em que se temos $2x + y = 21$, o que equivale a $2 \cdot 4 + 20 = 28$. Logo, $x \in \{8\}$.

→ para $x = 8$, então $y = \left(\frac{8}{8}\right)^2 \cdot 5 = 5$, note que de fato $2x + y = 21$, o que equivale a $2 \cdot 8 + 5 = 21$. Logo, **$x = 8 \wedge y = 5$** .

Assim, teremos o seguinte resultado:

$$(Base\ maior)^{Base\ menor} = 8^5 = (2^3)^5 = 2^{15}$$

Resposta: E

QUESTÃO 20

Os números reais e positivos ' x ' e ' y ' são tais que $x^2 + y^2 = 21$ e $(x - y)^2 = 9$. Nessas condições, determine o valor de 16^P , onde ' P ' é o produto das possíveis

soluções da expressão $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right)$.

(A) 1

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{3}{4}$

(D) $\frac{1}{16}$

(E) $\frac{1}{8}$

Resolução:

Observe que a expressão $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right)$ pode ser simplificada, por meio da propriedade do produto notável $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Isto é:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right) &= \\ \left(\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2\right) &= \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} &= \\ \frac{y - x}{xy}\end{aligned}$$

Note o enunciado da questão nos informa que:

$$\begin{cases} (I): x^2 + y^2 = 21 \\ (II): (x - y)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (I): (x - y)^2 + 2xy = 21 \\ (II): (y - x)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (I): xy = 6 \\ (II): y - x = \pm 3 \end{cases}$$

Deste modo, o valor da expressão será:

$$\frac{y - x}{xy} = \frac{\pm 3}{6} = \pm \frac{1}{2}$$

Repare que o produto P das soluções é $P = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$.

$$\text{Assim, } 16^P = 16^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{16^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{16}} = \frac{1}{2}.$$

Resposta: B