Matemática

e suas Tecnologias

Livro do Estudante

Ensino Médio

Brasília

MEC/INEP

2006

Coordenação Geral do Projeto
Maria Inês Fini

Coordenação de Articulação de Textos do Ensino Médio
Zuleika de Felice Murrie

Coordenação de Texto de Área
Ensino Médio
Matemática e suas Tecnologias
Maria Silvia Brumatti Sentelhas

Leitores Críticos

Área de Psicologia do Desenvolvimento
Márcia Zampieri Torres
Maria da Graça Bompastor Borges Dias
Leny Rodrigues Martins Teixeira
Lino de Macedo

Área de Matemática
Área de Matemática e suas Tecnologias
Eduardo Sebastiani Ferreira
Maria Eliza Fini
Maria Cristina Souza de Albuquerque Maranhão

Diretoria de Avaliação para Certificação de Competências (DACC)
Equipe Técnica
Ataíde Alves – Diretor
Alessandra Regina Ferreira Abadio
Célia Maria Rey de Carvalho
Ciro Haydn de Barros
Clediston Rodrigo Freire
Daniel Verçosa Amorim
David de Lima Simões
Dorivan Ferreira Gomes
Érika Márcia Baptista Caramori
Fátima Deyse Sacramento Porcidonio
Gilberto Edinaldo Moura
Gislene Silva Lima
Helvécio Dourado Pacheco
Hugo Leonardo de Siqueira Cardoso
Jane Hudson Abranches
Kelly Cristina Naves Paixão
Lúcia Helena P. Medeiros
Maria Cândida Muniz Trigo
Maria Vilma Valente de Aguiar
Pedro Henrique de Moura Araújo
Sheyla Carvalho Lira
Suely Alves Wanderley
Taíse Pereira Liocádio
Teresa Maria Abath Pereira
Weldson dos Santos Batista

Capa
Marcos Hartwich

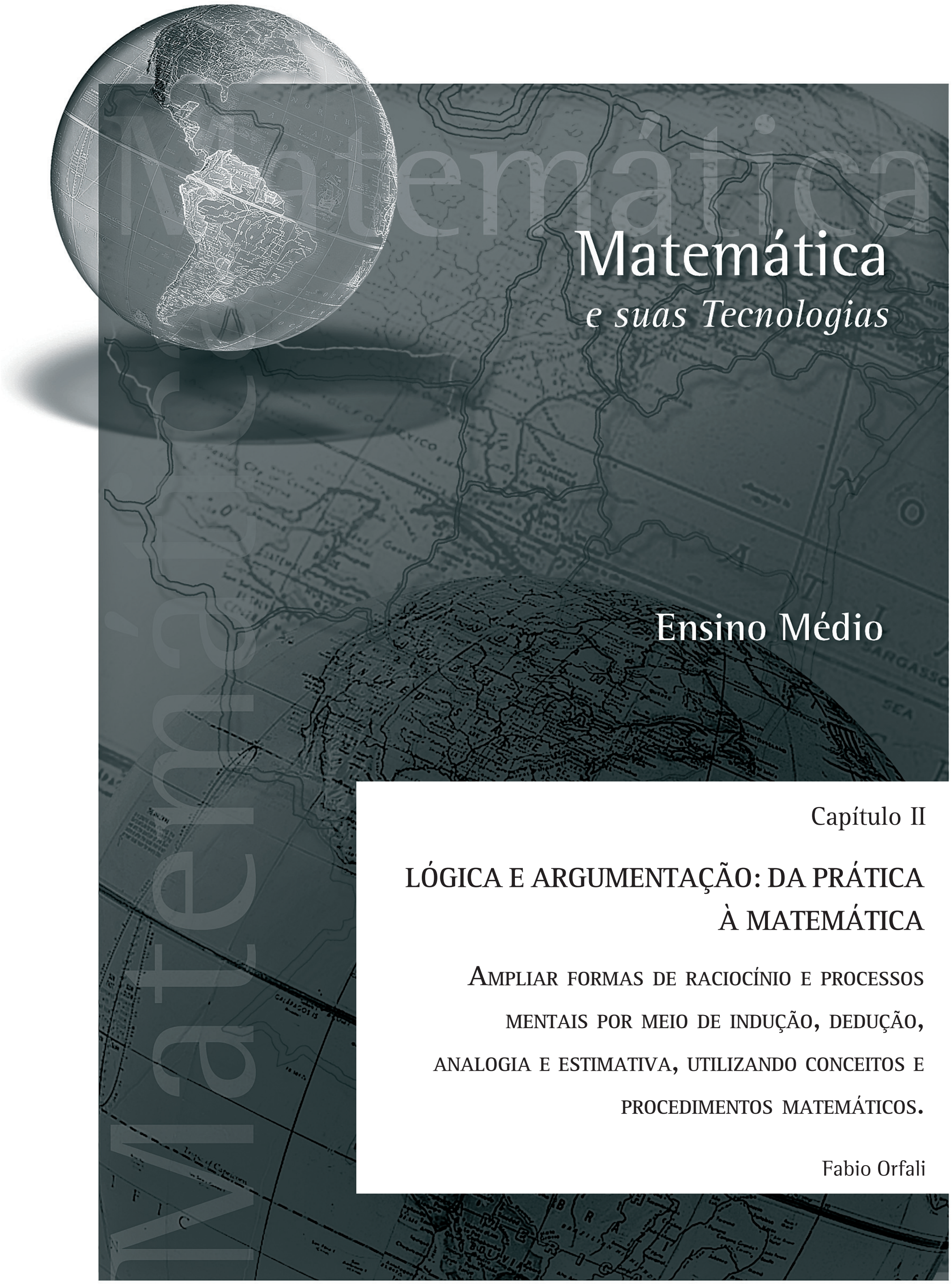
Ilustrações
Raphael Caron Freitas

Coordenação Editorial
Zuleika de Felice Murrie

M425 Matemática e suas tecnologias : livro do estudante : ensino médio /
Coordenação : Zuleika de Felice Murrie. — 2. ed. — Brasília : MEC : INEP, 2006.
244p. ; 28cm.

1. Matemática (Ensino Médio). I. Murrie, Zuleika de Felice.

CDD 510



Matemática

e suas Tecnologias

Ensino Médio

Capítulo II

LÓGICA E ARGUMENTAÇÃO: DA PRÁTICA À MATEMÁTICA

AMPLIAR FORMAS DE RACIOCÍNIO E PROCESSOS MENTAIS POR MEIO DE INDUÇÃO, DEDUÇÃO, ANALOGIA E ESTIMATIVA, UTILIZANDO CONCEITOS E PROCEDIMENTOS MATEMÁTICOS.

Fabio Orfali

Capítulo II

Lógica e argumentação: da prática à Matemática

Argumentação

Você já pensou no que existe em comum entre uma propaganda de certo produto na televisão, um artigo do editorial de um jornal e um debate entre dois políticos? Essas situações podem parecer bem diferentes, mas, se você analisar com cuidado, verá que, nos três casos, basicamente, tenta-se convencer uma ou mais pessoas de determinada idéia ou teoria.

Os criadores do comercial procuram convencer o público de que aquele produto é melhor do que o de seus concorrentes. O jornalista que escreve um artigo defende seu ponto de vista sobre um acontecimento do dia anterior e procura convencer os leitores de que suas idéias são as mais corretas. Já cada um dos políticos tenta mostrar aos eleitores que possui melhores condições de ocupar determinado cargo público do que seu adversário.

Mas como convencer alguém, ou nós mesmos, de que determinada idéia é, de fato, correta? É necessário que sejam apresentados fatos que justifiquem aquela idéia. Esses fatos são chamados de **argumentos**. Eles devem ser bem claros, ter uma relação lógica entre si, de tal maneira que a idéia considerada seja uma conseqüência natural dos argumentos apresentados.

Nem sempre, porém, isso ocorre. Muitas vezes, a argumentação não é feita de modo consistente e o resultado é que aquela idéia acaba não sendo aceita pelas outras pessoas. Observe o exemplo a seguir:

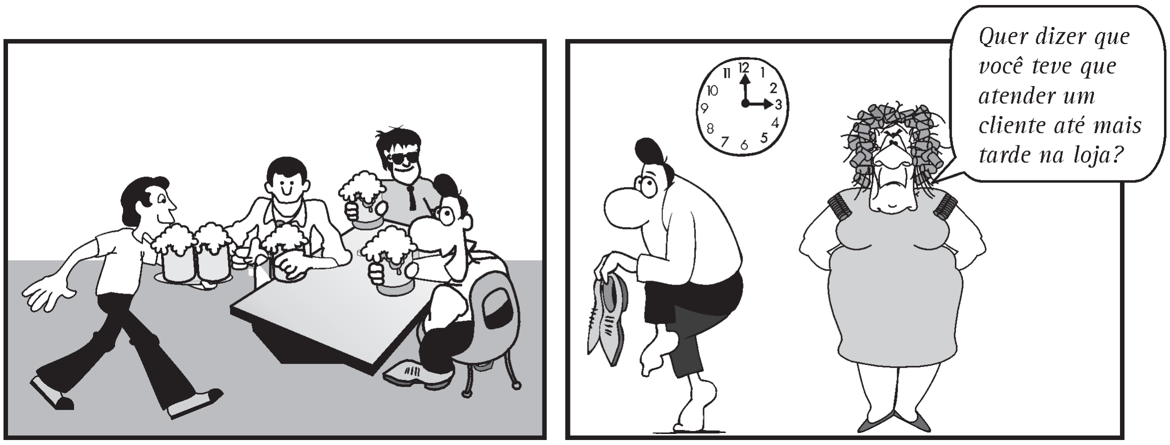


Figura 1

Você acha que o argumento utilizado pelo marido para justificar seu atraso está consistente?

Você já percebeu o quanto a argumentação é importante no dia-a-dia das pessoas? Observe que utilizamos argumentos para convencer nosso chefe de que merecemos um aumento, para convencer nossa namorada, ou namorado, a ir ao cinema quando ela, ou ele, preferia ficar em casa, e em diversas outras ocasiões. De uma boa argumentação pode mesmo depender o resultado de uma entrevista para se conseguir um novo emprego.

Mas afinal como a matemática se relaciona com tudo isso? Já discutimos que a capacidade de argumentar é uma habilidade extremamente importante ao ser humano. Ora, os resultados de uma teoria matemática só são aceitos mediante uma argumentação rigorosamente correta. É o que os matemáticos chamam de **demonstração.** Assim, no estudo da matemática, as regras do raciocínio lógico devem ser muito bem conhecidas e analisadas, o que leva ao aprimoramento de nossa capacidade de argumentar, mesmo em situações fora da matemática.

Observe a história abaixo:

Figura 2

A expressão utilizada por Juninho (*CQD- como queríamos demonstrar)* foi “emprestada” da Matemática. Ela normalmente é usada ao final de uma demonstração, quando os argumentos expostos já são suficientes para comprovar a afirmação que foi feita inicialmente.

Assim, o menino fez duas afirmações, querendo dizer que na sua cama o ambiente está tranqüilo, aconchegante e fora dela a situação é ruim, confusa. Neste instante, a mãe grita, pedindo auxílio com as compras. Ora, como alguém pode preferir guardar compras a uma cama quente e confortável? Para Juninho, essa é uma prova de que lá fora é o caos. Por isso, na sua opinião, aquele era um argumento que demonstrava suas afirmações iniciais.

Muitas vezes, na vida real, usamos apenas um fato para demonstrar que nossas idéias são verdadeiras. Em certas ocasiões isso é aceitável, em outras não.
Observe os exemplos abaixo:

- **Não disse que aquele time não era bom? Após 25 jogos, ele foi derrotado no último domingo.**
- **Não disse que aquele político era desonesto? Foi comprovado pela polícia seu envolvimento com o crime organizado.**

As duas argumentações baseiam-se em apenas um fato. Em sua opinião, qual dos argumentos é o mais razoável?

No ambiente científico, porém, as regras são bem mais rígidas. Uma afirmação não pode ser comprovada baseando-se em apenas um fato. E esse rigor está muito presente na matemática, de onde tiraremos vários exemplos analisados neste capítulo. Observe o diálogo abaixo:

Paulo: Todo número elevado ao quadrado é igual ao seu dobro.

Cláudia: Como você pode comprovar isso?

Paulo: Veja só: o quadrado de 2 é $2^2 = 4$ e o dobro de 2 também é 4.

Encontre um exemplo que mostre que a primeira afirmação feita por Paulo é falsa.

Está vendo? Neste caso pode até ter sido fácil encontrar um exemplo mostrando que a afirmação acima não é verdadeira. Observe que o quadrado de 3 é $3^2 =$ **9**, mas o dobro de 3 é

$2 \times 3 =$ **6.**

Existem outros casos, porém, em que certo comportamento pode ser observado em muitos números diferentes, o que nos dá vontade de dizer que ele ocorre com **todos** os números. Cuidado! Em Matemática, analisar apenas alguns exemplos não é suficiente para comprovar uma propriedade, pode no máximo nos dar uma “pista” de que aquela propriedade possa ser verdadeira.

Vamos mostrar um outro exemplo, para ressaltar ainda mais a importância desse fato:

Considere três retas r, s e t que se cruzam num único ponto P. É possível que r e s sejam perpendiculares e, ao mesmo tempo, r e t sejam perpendiculares?

(Lembre que retas perpendiculares são aquelas que se cruzam formando ângulos retos, como mostra a Figura 3.)

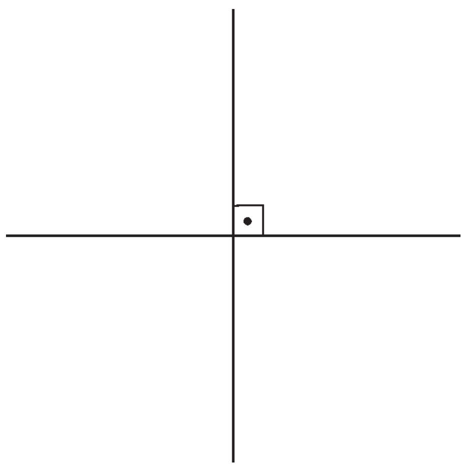


Figura 3

Tente pensar nesse problema antes de ler a solução. Uma boa dica é utilizar modelos para representar as retas como, por exemplo, três canetas, colocando-as em diferentes posições e observando se, em alguma delas, uma das canetas fica perpendicular, ao mesmo tempo, às outras duas.

Ao tentar resolver esse problema, Carlos não utilizou modelos: foi fazendo diversos desenhos, imaginando a situação sugerida no enunciado. No entanto, depois de desenhar as retas **r** e **s** perpendiculares, nunca conseguia uma posição para a reta **t**, de tal modo que ela também ficasse perpendicular a **r**. Observe alguns desses desenhos:

Muitos desenhos depois, sempre sem sucesso, Carlos finalmente concluiu: "Não é possível obtermos três retas **r**, **s** e **t** nas condições do problema. Os desenhos anteriores comprovam essa conclusão."

Ao utilizar apenas desenhos, Carlos não visualizou todas as situações possíveis para as retas. Com as canetas, você enxergou possibilidades diferentes das de Carlos? Você concorda com o argumento utilizado em sua conclusão?

Dias depois, olhando uma caixa de sapatos, Carlos finalmente visualizou uma solução para o problema: conseguiu enxergar, sobre a caixa, três retas que se cruzavam em um ponto e eram perpendiculares entre si!

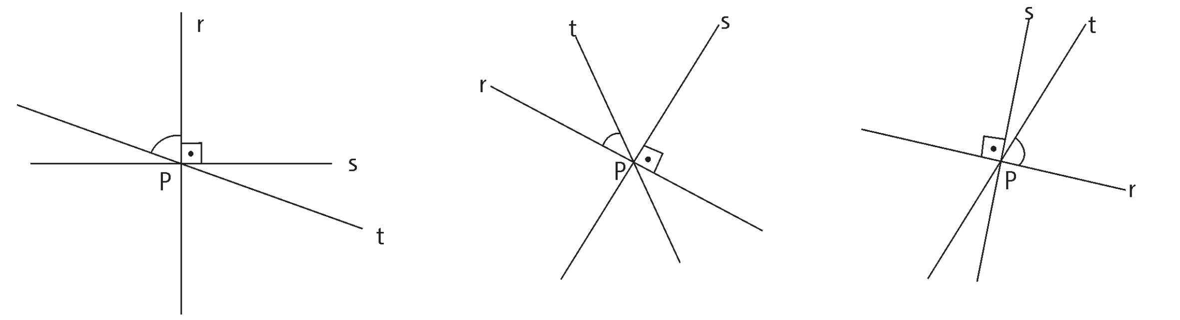


Figura 4

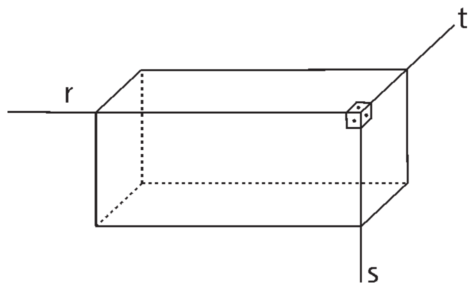


Figura 5

Se você não encontrou a solução do problema com as canetas, pegue uma caixa com o mesmo formato de uma caixa de sapatos e tente encontrar a solução de Carlos para o problema.

Na Figura 5, você encontra uma caixa parecida com a utilizada por Carlos. Observe as retas *r*, *s* e *t* que passam por três arestas da caixa.

Note que Carlos, em seus desenhos, não considerou a possibilidade das três retas não estarem no mesmo plano. Assim, mesmo que fizesse muitos desenhos, não conseguiria visualizar a solução do problema. Então, sua argumentação inicial estava inválida do ponto de vista matemático: ele tirou uma conclusão baseando-se apenas em alguns desenhos, que não representavam todas as possibilidades.

Então não se esqueça: embora no nosso dia-a-dia façamos isto em algumas situações, em matemática não devemos generalizar uma afirmação baseando-nos em apenas alguns exemplos, sem buscar uma comprovação daquele fato por uma demonstração que englobe todas as possibilidades.

Desenvolvendo competências

1

1. Observe os seguintes cálculos efetuados entre números ímpares:

$1 + 1 = 2$	$3 + 3 = 6$
$1 + 3 = 4$	$3 + 5 = 8$
$1 + 5 = 6$	$5 + 5 = 10$

A partir apenas dos cálculos efetuados acima, você pode concluir que sempre que somamos dois números ímpares, obtemos como resultado um número par? Por quê?

2. Num torneio de basquete, seis equipes enfrentam-se entre si, num total de cinco rodadas. Se uma equipe vencer todas as suas partidas, é automaticamente declarada campeã. Caso contrário, as duas equipes com maior número de vitórias disputam uma final para decidir a campeã. A tabela abaixo mostra a posição de cada equipe, após a realização de três rodadas:

Equipe	Vitórias	Derrotas
I	1	2
II	0	3
III	2	1
IV	2	1
V	3	0
VI	1	2

Tabela 1

Pelas regras do torneio e pela análise da tabela pode-se afirmar que a:

a) equipe V será a campeã do torneio.

b) final do torneio será entre as equipes III e IV ou entre as equipes IV e V.

c) equipe V é a única que pode ser a campeã sem ter de jogar a partida final.

d) equipe I não pode mais ser a campeã do torneio.

Desenvolvendo competências

2

No último mês, o consumo de energia elétrica na residência de Jorge, apontado na conta de luz, teve um aumento significativo, subindo de 150 para 270 kWh. Como aparentemente não havia motivo para tal aumento, Jorge começou a desconfiar que o problema pudesse ser da companhia fornecedora de energia elétrica. Por isso, ele decidiu perguntar aos seus vizinhos se eles tinham tido problema semelhante ultimamente. A Tabela 2 mostra o que cada vizinho respondeu:

Casa	Consumo em março (kWh)	Consumo em abril (kWh)
1	220	210
2	100	330
3	180	210
4	230	360
5	90	250
6	200	160
7	180	410
Jorge	150	270

Tabela 2

1. Em quantas das 8 casas da rua de Jorge houve aumento do consumo de energia elétrica do mês de março para o mês de abril?

2. Das residências onde houve aumento do consumo, em quantas esse aumento foi maior do que 100 kWh?

3. Utilizando como argumento os números da tabela acima, você diria que a companhia fornecedora de energia elétrica:

a) certamente é a responsável pelo aumento do consumo de energia nas casas da rua de Jorge.

b) provavelmente é a responsável pelo aumento do consumo de energia nas casas da rua de Jorge.

c) provavelmente não tem relação com o aumento do consumo de energia nas casas da rua de Jorge.

d) certamente não tem relação com o aumento do consumo de energia nas casas da rua de Jorge.

4. Jorge vai solicitar à companhia fornecedora de energia elétrica que verifique se há algum problema com a instalação elétrica de sua rua, que possa explicar o aumento do consumo de energia em algumas casas. Para isso, ele deve preencher um formulário, fazendo uma pequena justificativa de seu pedido. Escreva, em no máximo três linhas, essa justificativa, dando argumentos que convençam a companhia da necessidade de enviar um técnico à rua de Jorge.

Silogismos

Observe a frase abaixo, sobre a campanha de vacinação contra a paralisia infantil:

> **A vacina contra a Paralisia Infantil vai estar disponível nos postos de saúde até o dia 31 de agosto. Todas as crianças com menos de cinco anos de idade devem tomar a dose.**
>
> Fonte: http://www.saude.sc.gov.br

Flávia possui dois filhos: Pedro, de 7 anos, e Amanda, de 3 anos.

Considerando as afirmações acima, o que Flávia pode concluir? Ela deve levar seus dois filhos a um posto de saúde?

Como você pôde notar no exemplo acima, é muito comum, a partir de duas ou mais afirmações, tirarmos conclusões sobre um determinado assunto. Quando, porém, essas conclusões são válidas? Em outras palavras, será que existem maneiras que nos ajudem a decidir se a conclusão obtida realmente era uma conseqüência necessária das afirmações iniciais?

A resposta é sim: dentro daquilo que os matemáticos chamam de raciocínio formal, existem regras claras para decidir se um argumento é ou não válido. É muito útil trabalharmos alguns exemplos disso, que nos ajudem a melhorar nossas argumentações e a não aceitar certas argumentações completamente sem fundamentos.

Lembre-se sempre, porém, de uma coisa: a nossa vida cotidiana não exige tanta precisão quanto a matemática. Em algumas situações do dia-a-dia, certos raciocínios, embora não sejam rigorosamente corretos, são plenamente aceitáveis.

Observe o exemplo:

- **Júlio foi almoçar três sextas-feiras seguidas em um restaurante que foi inaugurado recentemente perto de seu trabalho. Nas três vezes, acabou passando muito mal do estômago. Concluiu que a comida do restaurante não lhe fazia bem e decidiu que não almoçaria mais naquele lugar.**

Embora, do ponto de vista matemático, a argumentação de Júlio não esteja rigorosamente correta (não podemos generalizar uma conclusão a partir de apenas três observações), você tomaria a mesma atitude que Júlio? Por quê?

Note que o fato de Júlio ter passado mal justamente nos três dias em que almoçou lá poderia ser uma coincidência. Como, porém, não se tratava de uma comprovação científica, baseada em argumentos rigorosos, Júlio preferiu não se arriscar e não voltou mais ao restaurante.

Vamos tentar agora obter uma conclusão baseando-nos em argumentos rigorosos.

Observe este exemplo:

- **Toda ave tem penas.**
- **As garças são aves.**

Que conclusão pode-se tirar a partir das duas afirmações acima?

Bem, se você respondeu que “as garças têm penas”, então acertou. Se você não tinha chegado a essa conclusão, tente pensar por que ela está correta.

Note ainda que, no caso de Júlio, a conclusão era bem provável, mas não era necessariamente verdadeira. Já nesse exemplo, considerando as duas afirmações iniciais, a conclusão é obrigatoriamente verdadeira.

Este tipo de argumentação, composta de duas afirmações e uma conclusão, é conhecida como **silogismo** e foi muito estudada pelos filósofos gregos.

Observe agora o seguinte silogismo:

- **Todos os carros da marca X têm direção hidráulica.**
- **Alguns carros da marca Y têm direção hidráulica.**

Logo, alguns carros da marca X são da marca Y.

Note que a conclusão do silogismo é certamente inválida, pois um carro não pode ser ao mesmo tempo de duas marcas. Explique, nesse caso, por que, considerando as duas afirmações iniciais, a conclusão não é necessariamente verdadeira.

Observe agora este outro exemplo:

A direção de uma empresa decidiu que somente os funcionários que trabalham há mais de 10 anos na firma têm direito de solicitar ao setor de benefícios empréstimo para compra de casa própria. O funcionário mais antigo do departamento de compras trabalha na empresa há 7 anos.
Se o Sr. Odécio trabalha no departamento de compras, pode-se concluir que:

a) dentre os funcionários do departamento de compras, somente o Sr. Odécio não tem direito de solicitar empréstimo para compra de casa própria.

b) somente os funcionários do departamento de compras não têm direito de solicitar empréstimo para compra de casa própria.

c) não é possível saber se o Sr. Odécio tem direito de solicitar empréstimo para compra de casa própria, pois não sabemos há quanto tempo ele trabalha na firma.

d) o Sr. Odécio e todos os demais funcionários do departamento de compras não têm direito de solicitar empréstimo para compra de casa própria.

Na realidade, temos três afirmações iniciais e queremos, a partir delas, tirar uma conclusão:

1. **Somente** funcionários com mais de 10 anos na empresa têm direito de solicitar empréstimo para compra de casa própria.

2. **Nenhum** funcionário do departamento de compras tem mais de 10 anos na empresa (pois o mais antigo tem 7 anos).

3. O Sr. Odécio trabalha no departamento de compras.

Usando as informações 2 e 3, concluímos que o Sr. Odécio trabalha na empresa há menos de 10 anos. Então, usando a informação 1, concluímos que ele não tem direito a solicitar empréstimo para compra da casa própria.

Note ainda que, usando as informações 1 e 2, podemos concluir que nenhum funcionário do departamento de compras tem direito de solicitar empréstimo para compra de casa própria. Assim, concluímos que a alternativa correta é *d*.

Vamos analisar também a alternativa *b*. Pelo enunciado, não podemos afirmar com certeza se a afirmação está correta, pois podem existir outros funcionários com menos de 10 anos na empresa que não trabalham no departamento de compras e, portanto, não têm direito de solicitar empréstimo para compra de casa própria. Sendo assim, a afirmação não pode ser considerada correta.

Desenvolvendo competências

3

1. Numa escola particular, 20 das suas 100 vagas são reservadas a alunos que, por se destacarem nos estudos, não pagam mensalidade. Metade desses alunos participam do time de futebol da escola. A partir dessas informações, pode-se concluir que:

a) Pelo menos 10 alunos da escola fazem parte do time de futebol.

b) Todos os integrantes do time de futebol da escola não pagam mensalidade.

c) Alguns alunos que pagam mensalidade fazem parte do time de futebol.

d) Metade dos integrantes do time de futebol não pagam mensalidade.

Desenvolvendo competências

4

O diagrama abaixo (Figura 6) mostra a distribuição dos alunos de uma escola de Ensino Médio nos cursos optativos que são oferecidos no período da tarde:

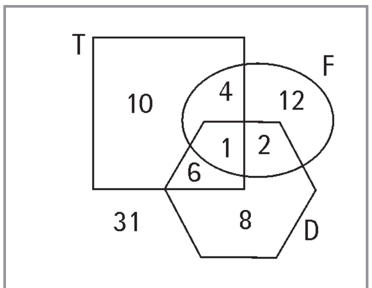


Figura 6

T: curso de teatro

F: curso de fotografia

D: curso de dança

Note que o diagrama mostra, por exemplo, que apenas 1 aluno freqüenta os três cursos ao mesmo tempo e que 31 alunos não freqüentam nenhum dos cursos optativos.

1. Deverá ser entregue um aviso por escrito a todos os alunos que freqüentam mais de um curso optativo. Assim, o número de alunos que receberá o aviso é igual a:

a) 30 b) 13 c) 12 d) 1

2. Os números de alunos matriculados nos cursos de teatro, de fotografia e de dança são, respectivamente:

a) 10, 12 e 8 b) 11, 7 e 9 c) 16, 18 e 20 d) 21, 19 e 17

Diagramas e problemas numéricos

Na atividade 4, nós utilizamos diagramas para representar as quantidades de alunos que freqüentavam cada um dos cursos optativos oferecidos pela escola. Vamos agora, usando diagramas, resolver outros problemas envolvendo quantidades numéricas.

A associação de moradores de uma comunidade conseguiu verba para melhorar o centro de cultura e lazer existente em sua sede. Decidiu-se, então, fazer uma consulta aos membros da comunidade, para definir a melhor maneira de aplicar o dinheiro.

Cada uma das 250 famílias recebeu uma ficha com a seguinte pergunta: “Quais das opções abaixo a sua família considera importantes para o centro de cultura e lazer de nossa comunidade?” As opções de resposta eram:

- construção de um espaço de recreação e prática de esportes para crianças
- construção de uma sala para leitura e realização de palestras
- nenhuma das duas

Os dados da pesquisa, que foi respondida por todas as famílias, foram organizados na tabela abaixo:

Opção	*N° de respostas*
espaço para recreação e	*111*
esportes sala para leitura e palestras	*183*
nenhuma das duas	*24*

Tabela 3

Um líder comunitário, ao observar a Tabela 3 anterior, perguntou se muitas famílias se interessaram tanto pelo espaço para recreação e esportes quanto pela sala de leitura, pois, dependendo da quantidade,
eles poderiam pensar em adiar a compra de um computador para a associação, que estava programada, e construir as duas coisas.

A partir dos dados da tabela, é possível identificar quantas famílias se interessaram pelas duas obras, quantas apenas pelo espaço para recreação e quantas apenas pela sala de leitura?

Pode ser que, fazendo apenas algumas contas, você consiga responder à questão acima. Mas e se a pesquisa fosse mais complexa e o questionário envolvesse três opções, por exemplo?

Por isso, é bastante útil representarmos o problema acima com diagramas. Observe a Figura 7. Nela, **F** é o conjunto de todas as famílias, **R** é o conjunto das famílias que optaram pelo espaço de recreação e **L** o das que optaram pela sala de leitura. *Quais famílias estariam representadas na região quadriculada do diagrama?*

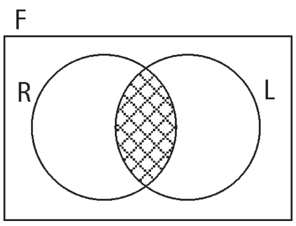


Figura 7

Observe que a região quadriculada na figura pertence tanto ao conjunto **R** quanto ao **L** e por isso é reservada às famílias que optaram pelas duas obras, pois isso era possível na pesquisa. Dizemos que essa região corresponde à intersecção dos dois conjuntos.

Há ainda uma região reservada às famílias que não se interessam por nenhuma das duas obras (dentro de **F**, mas fora de **R** e fora de **L**, ou seja, dentro do retângulo, mas fora dos dois círculos).

Para preenchermos o diagrama com dados numéricos, devemos começar pela região de intersecção, pois as outras regiões dependem dela. Como não conhecemos, no nosso problema, quantas famílias estão nessa região, chamamos esta quantidade de **x**.

Há **111** famílias que optaram pelo espaço para recreação. Destas, **x** também optaram pela sala de leitura. Então, **111 - x** são as que optaram **apenas** pelo espaço para recreação. Com o mesmo raciocínio, concluímos que **183 - x** optaram **apenas** pela sala de leitura. Como **24** não se interessaram por nenhuma das duas obras, nosso diagrama fica:

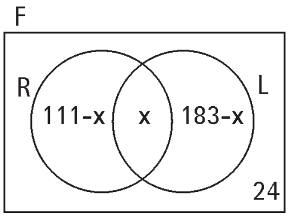


Figura 8

Como há 250 famílias na comunidade, a soma das quantidades das quatro regiões deve ser igual a 250. Obtemos, então, a seguinte equação:

$(111 - x) + x + (183 - x) + 24 = 250$

$318 - x = 250$

$-x = -68$

$x = 68$

Com isso, concluímos que 68 famílias estão interessadas pelas duas obras. Somente pelo espaço para recreação, existem 111 – 68 = 43 famílias interessadas. Somente pela sala de leitura, são 183 – 68 = 115 famílias interessadas.

Note que a soma 68 + 43 + 115 + 24 deve ser igual ao total de famílias, ou seja, 250.

Desenvolvendo competências

5

1. O Gráfico 1 mostra uma pesquisa realizada com 500 pessoas sobre o seu hábito de leitura dos jornais I e II:

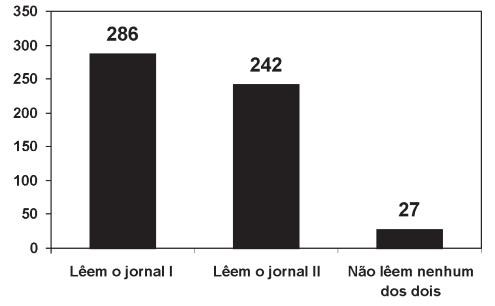


Gráfico 1

A partir dos dados do gráfico, pode-se concluir que o número de entrevistados que habitualmente lêem os jornais I e II é igual a:

a) 44 *b) 55* *c) 63* *d) 71*

2. Uma academia de ginástica, após a inauguração de sua piscina, ofereceu mais dois cursos a seus freqüentadores: hidroginástica e natação. 52 pessoas inscreveram-se na hidroginástica e 47 na natação. Constatou-se que 7 pessoas inscreveram-se nos dois cursos. Então, o número de pessoas que se interessaram por pelo menos um dos novos cursos é:

a) 106 *b) 99* *c) 92* *d) 85*

Implicação

1. A frase abaixo foi retirada de uma propaganda veiculada em um jornal de grande circulação e diz respeito a uma grande festa promovida por uma empresa:

SE VOCÊ NÃO CONSEGUIU INGRESSO PARA A FESTA DESTE ANO,
TENTE ENCARAR PELO LADO BOM:
VOCÊ DANÇOU

As pessoas que não conseguiram ingresso, não puderam ir à festa deste ano. Sendo assim, a palavra "dançou" foi utilizada na propaganda com qual significado?

Note que existe uma relação entre dois fatos mencionados na propaganda: SE você não conseguiu ingresso, ENTÃO dançou. Esta é uma relação de causa e conseqüência (também chamada de causa e efeito):

CAUSA – não conseguiu ingresso

CONSEQÜÊNCIA – dançou

Em matemática, esta relação é conhecida como **implicação** e é representada pelo símbolo:

$$\Rightarrow$$

Poderíamos representar nosso exemplo da seguinte maneira:

não conseguiu ingresso $\Rightarrow$ dançou

2. Vamos analisar agora um outro exemplo de implicação. Suponha que você chegue a sua casa e observe que a rua está molhada.

A partir desse fato, você pode concluir que choveu na sua casa naquele dia?

Note que a sua rua pode estar molhada porque algum cano de água se rompeu ou alguém estava regando as plantas do jardim. Então, não é possível afirmar com certeza que choveu naquele dia.

Pensando sobre essa situação, observe as duas implicações abaixo:

1) Se chove, então a rua fica molhada.

2) Se a rua está molhada, então choveu.

As duas implicações acima têm o mesmo significado?

Repare que, apesar de serem muito parecidas (a implicação *2* é a implicação *1* invertida), as duas frases não têm o mesmo significado. A única coisa que fica garantida com a primeira frase é que, no caso de ocorrer chuva, a rua ficará molhada. O contrário, porém, não é necessariamente verdadeiro. Como já vimos, a rua pode estar molhada sem que tenha chovido.

Inverter uma relação de implicação é um erro bastante comum em argumentações, que não deve ser feito. Existe, no entanto, uma maneira equivalente de escrevermos uma implicação, muito utilizada em matemática, que iremos discutir a seguir.

3. Observe a questão abaixo:

O prefeito de uma cidade declarou à imprensa que, se forem contratados mais médicos para o hospital municipal, então os impostos deverão ser aumentados. Qual das frases abaixo é equivalente à declaração do prefeito?

1) Se os impostos aumentaram, então mais médicos foram contratados para o hospital municipal.

2) Se os impostos não aumentaram, então não foram contratados mais médicos para o hospital municipal.

3) Se não foram contratados mais médicos para o hospital, então os impostos não foram aumentados.

Note que a afirmação inicial do prefeito é uma implicação:

contratação de novos médicos $\Rightarrow$ aumento de impostos

Observe ainda que outros fatores podem levar ao aumento de impostos: a contratação de novos professores para a escola municipal ou o aumento do salário dos funcionários da prefeitura pode levar a um aumento de impostos, mesmo que não sejam contratados novos médicos. Então, não é correto afirmar que se os impostos aumentaram, obrigatoriamente novos médicos foram contratados. Assim, a afirmação *1* não está correta.

Da mesma maneira, mesmo que não tenham sido contratados novos médicos, os impostos podem ter subido, devido a outros motivos. Logo, a afirmação *3* também não está correta.

Mas uma coisa, porém, é certa: se os impostos não tiveram de ser aumentados, podemos concluir que não foram contratados novos médicos (afinal, se fossem contratados, os impostos subiriam). A afirmação *2* é, portanto, equivalente à frase inicial do prefeito.

Vamos fazer um esquema das conclusões que tiramos:

contratação de médicos $\Rightarrow$ aumento de impostos

$\Updownarrow$

não aumento de impostos $\Rightarrow$ **não** contratação de médicos

Assim, se temos uma afirmação *a* que implica uma afirmação *b*, isto é equivalente a dizer que não *b* implica não *a*. Veja:

$a \Rightarrow b$ EQUIVALENTE A não $b \Rightarrow$ não a

Esse esquema dado acima pode ajudá-lo a decifrar um argumento, principalmente quando as frases são muito longas ou complexas. Basta transformar as afirmações em símbolos!

Desenvolvendo competências

6

1. Um analista econômico disse, em uma entrevista à televisão, que, se os juros internacionais estiverem elevados, então a inflação no Brasil crescerá. A partir dessa afirmação, pode-se concluir que, certamente:

a) se os juros internacionais estiverem baixos, então a inflação no Brasil diminuirá.

b) se a inflação no Brasil não tiver crescido, então os juros internacionais estarão baixos.

c) se a inflação no Brasil tiver crescido, então os juros internacionais estarão elevados.

d) se os juros internacionais não forem elevados, então a inflação brasileira cairá ou ficará igual.

2. Um quadrilátero é um polígono de 4 lados. A Figura 9 mostra um quadrilátero ABCD. Os segmentos AC e BD são chamados diagonais do quadrilátero. Lembre-se que um retângulo e um quadrado são quadriláteros.

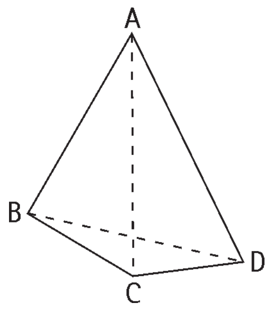


Figura 9

As duas afirmações abaixo, sobre quadriláteros, são verdadeiras.

- Se um quadrilátero é um quadrado, então ele também é um retângulo.
- As diagonais de qualquer retângulo são congruentes (isto é, têm a mesma medida).

A partir das informações acima, é correto afirmar que:

a) se um quadrilátero tem as diagonais congruentes, então ele é um quadrado.

b) todo retângulo é também um quadrado.

c) um quadrilátero que não é um quadrado não pode ter as diagonais congruentes.

d) um quadrilátero que não tem as diagonais congruentes não pode ser um quadrado.

Dedução

Vamos usar o que discutimos sobre argumentação para entender como se organizam as teorias matemáticas, ou seja, como as pessoas conseguem "descobrir" novos fatos dentro da matemática e convencer-se de que eles são verdadeiros.

Na matemática, assim como no nosso dia a dia, usamos com muita freqüência o raciocínio **dedutivo**. Observe a história abaixo para entender o que chamamos de dedução:

Note que a menina dona do ursinho sabe quem foi o autor da brincadeira. Utilizando-se de um raciocínio dedutivo ela concluiu quem teria deixado o ursinho do outo lado da margem, baseando-se em um fato: o menino está molhado!

Tente lembrar-se de uma situação que lhe tenha ocorrido, em que você utilizou a dedução.

Figura 10

Vamos agora, partindo de alguns fatos matemáticos, deduzir um novo fato, que você talvez já tenha ouvido falar: a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre igual a 180°.

I. Fatos iniciais

a) Considere, em um plano, uma reta *r* e um ponto P fora de *r*, como mostra a Figura 11. Então, existe uma única reta *s*, paralela a *r*, passando pelo ponto P.

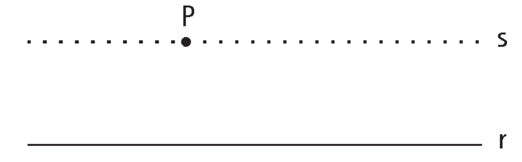


Figura 11

b) Considere, num plano, duas retas paralelas *a* e *b*, como mostra a Figura 12, e uma reta transversal *t*. Então, os ângulos α e β assinalados na figura são congruentes, isto é, têm medidas iguais.

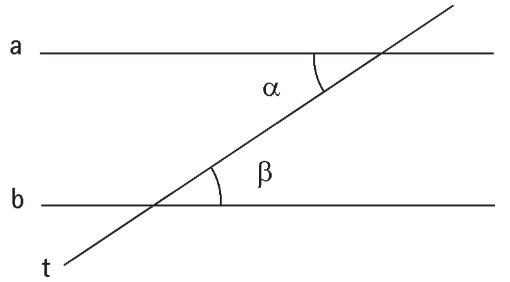


Figura 12

c) Se um ângulo raso (ângulo de meia volta) é dividido em três ângulos, então a soma desses ângulos é igual a 180°.

$$\boxed{x + y + z = 180^\circ}$$

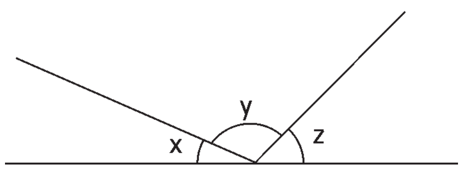


Figura 13

II. Dedução da propriedade

Vamos considerar um triângulo ABC qualquer, cujos ângulos internos medem x, y e z, como mostra a Figura 14.

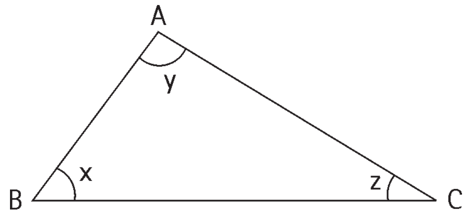


Figura 14

Pelo fato *a*, podemos desenhar uma reta *r*, paralela ao lado BC, passando pelo ponto A.

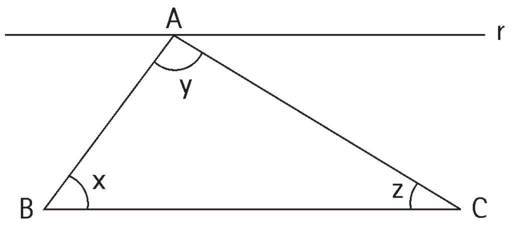


Figura 15

Pelo fato *b*, podemos representar:

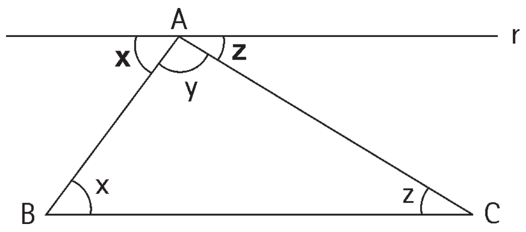


Figura 16

Finalmente, pelo fato *c* concluímos que x + y + z = 180°. Acabamos de deduzir que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre igual a 180°. Note que a nossa dedução é muito parecida com a da menina do ursinho ou com aquela que usamos no dia-a-dia: partindo de alguns fatos conhecidos e usando argumentos logicamente válidos, podemos produzir novas afirmações, também verdadeiras. A única diferença é que na matemática sempre deixamos claros os fatos iniciais que estamos utilizando, o que no cotidiano nem sempre fazemos.

Desenvolvendo competências

7

Usando como fato conhecido que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo vale 180°, deduza quanto vale a soma dos ângulos internos de um quadrilátero.

Sugestão: *utilize a Figura 17 e divida o quadrilátero em dois triângulos.*

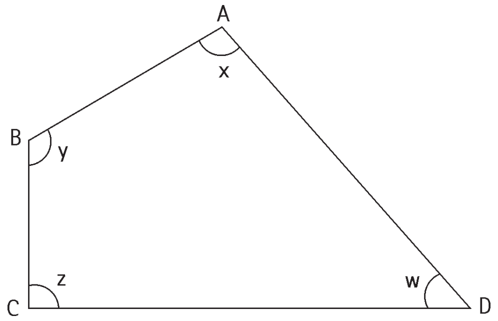


Figura 17

Vamos observar agora a dedução de uma propriedade algébrica. Utilizando a propriedade distributiva da multiplicação, deduza uma maneira equivalente de escrever o produto

$(a + b) \,.\, (a - b)$.

Vamos relembrar a propriedade distributiva da multiplicação antes de iniciarmos nossa dedução. Desenvolva o produto $2y \,.\, (y - 3)$.

Note que o fator 2y deve ser "distribuído" tanto ao y quanto ao 3. Assim:

$$2y \,.\, (y - 3) = 2y \,.\, y - 2y \,.\, 3 = 2y^2 - 6y$$

Voltando à nossa pergunta, vamos desenvolver o produto $(a + b) \,.\, (a - b)$ utilizando a propriedade distributiva:

$$(a + b) \,.\, (a - b) = a.a - \cancel{a.b} + \cancel{a.b} - b.b = a^2 - b^2$$

Note que usamos também a lei do cancelamento da adição: $a \,.\, b - a \,.\, b = 0$. Assim, concluímos que **$(a + b) \,.\, (a - b) = a^2 - b^2$.**

Desenvolvendo competências

8

Utilizando a propriedade distributiva da multiplicação, deduza uma maneira equivalente de escrever o produto $(a + b)^2$.

Sugestão: Lembre-se de que $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b)$.

Indução

Observe a seguinte seqüência de figuras:

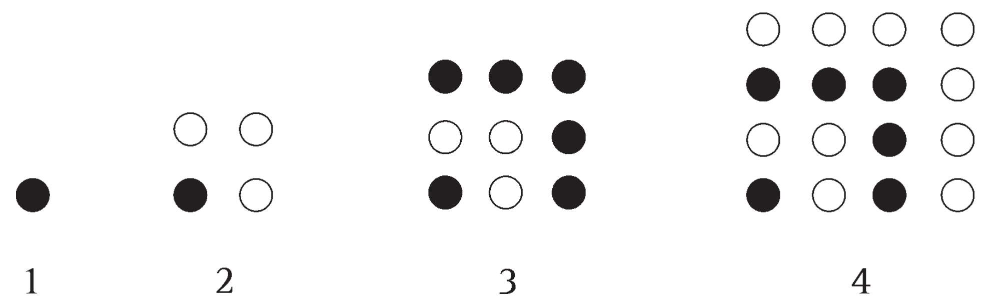


Figura 18

Note que o número de bolinhas em cada figura vai aumentando seguindo uma certa lei. De acordo com essa lei,

a) desenhe a 5ª figura dessa seqüência.

b) Quantas bolinhas há na Figura 5?

c) Responda, sem fazer o desenho, quantas bolinhas há na figura 6?

Ao fazer o desenho, você deve ter observado que a 5ª figura possui 25 bolinhas.

Em seguida, você pôde, sem fazer o desenho, dar um bom "palpite" sobre o número de bolinhas existentes na 6ª figura. Para isso, você teve de analisar o comportamento das figuras anteriores. Observe a Tabela 4 abaixo:

Se o comportamento for mantido, esperaremos que a 6ª figura tenha 6 . 6 = 36 bolinhas. Fazendo o desenho, você pode comprovar que, de fato, esse é o número de bolinhas da figura 6 e que nosso "palpite" estava certo.

O raciocínio que utilizamos na nossa resposta, sem fazer o desenho, é um exemplo do que chamamos **raciocínio indutivo**. A partir da observação de alguns casos particulares, identificamos um comportamento que se repetia e fizemos uma **conjectura** (ou seja, um palpite).

Observe que o raciocínio indutivo, em matemática, ajuda-nos a "desconfiar" de um resultado e, por isso, é extremamente importante.

Figura	1	2	3	4	5
Bolinhas	1 x 1=1	2 x 2=4	3 x 3=9	4 x 4=16	5 x 5=25

Tabela 4

No entanto, não devemos considerar válida uma conclusão baseando-nos apenas na indução. No nosso caso, o desenho da 6ª figura da Figura 18 poderia nos confirmar a validade de nossa conclusão.

Esse fato não tira a importância do raciocínio indutivo. É graças a ele que a maioria das descobertas em matemática e nas demais ciências foi feita. Normalmente, é da observação de um comportamento que se repete em alguns casos particulares que os cientistas tiram inspiração para estudar determinado fenômeno. O raciocínio dedutivo, depois, serve para confirmar ou não aquelas suspeitas.

No nosso caso, poderíamos usar um argumento geométrico para confirmar o nosso "palpite": a 6ª figura da Figura 18 é um quadrado com 6 bolinhas em cada lado. Sendo assim, possui 6 fileiras com 6 bolinhas cada, ou seja, $6 \,.\, 6 = 36$ bolinhas. Observe ainda que, com esse argumento, poderíamos generalizar a nossa conclusão: a figura n possui $n \,.\, n = n^2$ bolinhas.

Desenvolvendo competências

9

1. Considere a sequência de figuras formadas por bolinhas, representada na figura 18. Note que, em cada figura, acrescentamos uma nova "camada" de bolinhas, todas da mesma cor. Assim, a 4ª figura, por exemplo, era formada por 4 "camadas" de bolinhas:

1 (laranja) + 3 (brancas) + 5 (laranjas) + 7 (brancas) = 16 bolinhas.

a) Usando a 5ª figura, desenhada por você, tente, sem efetuar a adição, prever o resultado da soma 1 + 3 + 5 + 7 + 9.

b) Note que o resultado que você obteve no item a é a soma dos 5 primeiros números ímpares positivos. Usando esse raciocínio, tente prever o resultado da soma dos 10 primeiros números ímpares positivos.

2. Um restaurante tem mesas retangulares de diferentes tamanhos, para acomodar um número diferente de clientes. A Figura 19 mostra os três menores tipos de mesa e o número de clientes acomodados em cada um deles:

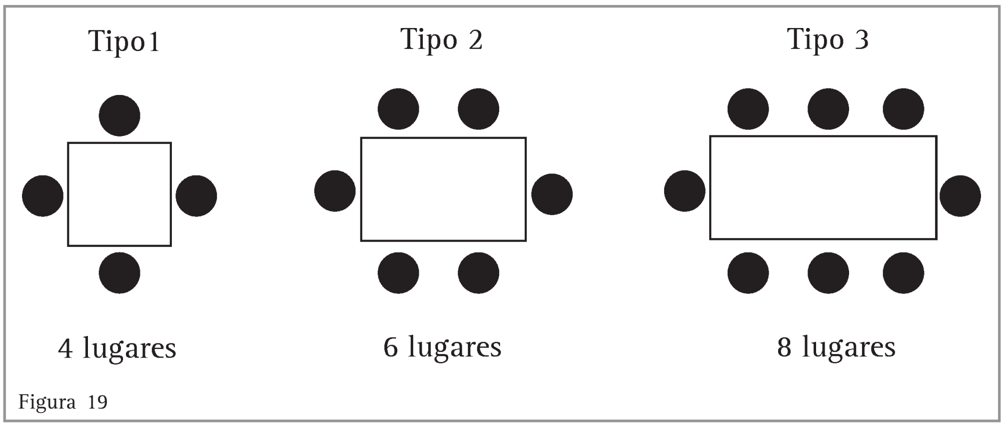


Figura 19

Seguindo o mesmo padrão apresentado na seqüência de figuras acima, o número de clientes que podem ser acomodados em uma mesa do tipo 6 é:

a) 12 *b) 14* *c) 16* *d) 18*

Seqüências

Os jogos olímpicos, o mais importante evento esportivo do planeta, ocorrem a cada 4 anos. Os últimos jogos olímpicos ocorreram na cidade de Atenas, no ano de 2004. É possível sabermos em quais anos teremos a realização de jogos olímpicos? Ora, essa não é uma pergunta difícil, já temos as informações necessárias para respondê-la:

2004, 2008, 2012, 2016, 2020, ...

Os números acima formam uma seqüência. Note que obedecemos uma ordem ao escrevermos esses números. Dizemos que 2004 é o 1º termo da seqüência, 2008 é o 2º termo, 2012 é o 3º termo e, assim, sucessivamente. Essa informação normalmente é dada de maneira mais resumida. Observe:

$a_1 = 2004$

$a_2 = 2008$

$a_3 = 2012$

Quem é, na nossa seqüência, a_4? E a_6?

A nossa seqüência é formada por números, mas também podemos estudar seqüências de figuras, objetos, letras ou qualquer outra coisa que desejarmos.

Note que existe uma lei em nossa seqüência, que nos permite descobrir quais serão os seus próximos elementos. Nem sempre, porém, isso ocorre. Imagine que a seqüência (3, 0, 2, 1, 1, 2) seja o número de gols que uma equipe marcou nos 6 primeiros jogos de um campeonato.

É possível sabermos o próximo elemento dessa seqüência apenas observando os anteriores?

Neste capítulo, vamos estudar apenas as seqüências que obedecem alguma lei, permitindo prever quais serão seus próximos elementos. Com isso, estaremos utilizando tanto o nosso raciocínio dedutivo quanto o indutivo.

Uma estrada possui telefones de emergência a cada 3 quilômetros. O primeiro telefone está colocado no quilômetro 2 da estrada.

a) Determine a localização dos cinco primeiros telefones de emergência.

b) Determine a localização do 72º telefone de emergência.

c) Se a estrada tem uma extensão de 350 km, quantos telefones de emergência ela possui?

a) Observe que, das informações do enunciado, percebemos a existência de um padrão regular na colocação dos telefones. Assim, partindo do quilômetro 2, basta acrescentarmos 3 quilômetros para obtermos a localização do próximo telefone:

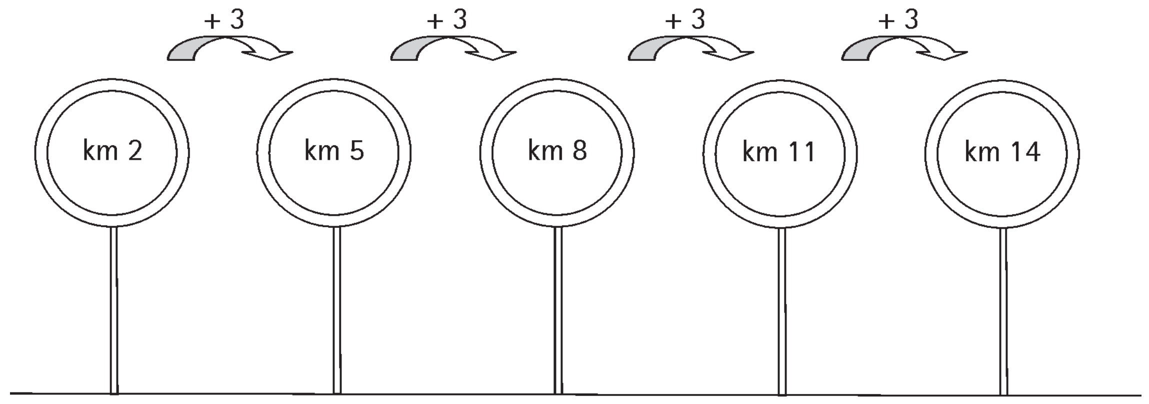


Figura 21

Então, os cinco primeiros telefones de emergência estão localizados nos quilômetros 2, 5, 8, 11 e 14.

b) É possível obtermos a localização do 72º telefone da mesma maneira que fizemos no item anterior, ou seja, somando 3 quilômetros à localização de cada telefone para obter a localização do seguinte e, assim, sucessivamente. Deve haver, porém, uma maneira mais simples, você não acha? Vamos tentar estabelecer um padrão:

Telefone	Operação realizada	Localização (km)
1	——	2
2	2 + 3	5
3	2 + 3 + 3	8
4	2 + 3 + 3 + 3	11
5	2 + 3 + 3 + 3 + 3	14

Tabela 5

Note que temos de efetuar uma série de adições, sempre com a mesma parcela 3. Então, podemos efetuar essa operação utilizando a multiplicação. Olhe como fica melhor:

Telefone	Operação realizada	Localização (km)
1		2
2	2 + **1** . 3	5
3	2 + **2** . 3	8
4	2 + **3** . 3	11
5	2 + **4** . 3	14

Tabela 6

Você percebe a relação entre o número do telefone e o fator pelo qual devemos multiplicar o 3?

Observe que o fator pelo qual multiplicamos o 3 é sempre um a menos do que o número do telefone (telefone 5 $\rightarrow$ $2 + 4 \cdot 3$). De maneira semelhante, para o 72º telefone, teríamos:

telefone 72 $\rightarrow$ $2 + 71 \cdot 3 = 215$

Então, o 72º telefone estaria no quilômetro 215.

c) Para responder a esta pergunta, vamos tentar generalizar a conclusão que tiramos no item b. Lembre-se que o fator pelo qual multiplicamos o 3 é sempre um a menos do que o número do telefone. Então, vamos considerar um telefone genérico n. De acordo com a conclusão acima, então, a sua localização seria:

telefone n $\rightarrow 2 + (n - 1) \cdot 3$

A expressão acima é chamada lei de formação da seqüência. Note que, a partir dela, é possível obtermos a localização de qualquer telefone, bastando para isso substituir a variável n pelo número do telefone cuja localização desejamos saber. Por exemplo, para sabermos a localização do 58º telefone, basta fazermos:

telefone 58 $\rightarrow 2 + (58 - 1) \cdot 3 = 2 + 57 \cdot 3 = 173$, isto é, o 58º telefone está localizado no quilômetro 173.

Voltando à nossa pergunta, desejamos saber o número do telefone que está localizado no quilômetro 350 (seria o último telefone da estrada). Nesse caso então, conhecemos a localização (**350**) e queremos obter o valor de **n** correspondente. Basta então resolvermos esta equação:

$\mathbf{350} = 2 + (\mathbf{n} - 1) \cdot 3$

Aplicando a propriedade distributiva, temos:

$350 = 2 + 3n - 3$

$350 - 2 + 3 = 3n$

$351 = 3n$

$\frac{351}{3} = n$

$n = 117$

Portanto, a estrada conta com 117 telefones de emergência.

Você notou como a lei de formação da seqüência é importante? Com ela, podemos obter qualquer termo da seqüência, bastando para isso substituir a variável n pela posição do termo que queremos descobrir. Por exemplo, se a lei de formação de uma seqüência é:

$a_n = -4 + 2n^2$

e desejamos obter os cinco primeiros termos da seqüência, basta fazermos:

$n = 1 \rightarrow a_1 = -4 + 2 \cdot 1^2 \therefore a_1 = -4 + 2 \therefore a_1 = -2$

$n = 2 \rightarrow a_2 = -4 + 2 \cdot 2^2 \therefore a_2 = -4 + 8 \therefore a_2 = 4$

$n = 3 \rightarrow a_3 = -4 + 2 \cdot 3^2 \therefore a_3 = -4 + 18 \therefore a_3 = 14$

$n = 4 \rightarrow a_4 = -4 + 2 \cdot 4^2 \therefore a_4 = -4 + 32 \therefore a_4 = 28$

$n = 5 \rightarrow a_5 = -4 + 2 \cdot 5^2 \therefore a_5 = -4 + 50 \therefore a_5 = 46$

Então, os cinco primeiros termos dessa seqüência são: –2, 4, 14, 28 e 46.

Desenvolvendo competências

10

1. Se a lei de formação de uma seqüência é dada por $\boldsymbol{a_n = n + n^2}$*, então o segundo* ($a_2$) *e o quinto* ($a_5$) *termos dessa seqüência são, respectivamente:*

a) 6 e 30

b) 16 e 30

c) 6 e 100

d) 16 e 100

2. Uma pessoa, desejando recuperar a forma física, elaborou um plano de treinamento que consistia em caminhar por 20 minutos no primeiro dia, 22 minutos no segundo dia, 24 minutos no terceiro dia e assim sucessivamente. Uma lei que permite calcular quantos minutos essa pessoa caminharia no dia $\boldsymbol{n}$ *é dada por:*

a) $20 \cdot (n - 1) + 2$

b) $20 \cdot n + 2$

c) $20 + (n - 1) \cdot 2$

d) $20 + n \cdot 2$

Conferindo seu conhecimento

1

1. Não, pois em matemática não podemos concluir que um fato é verdadeiro a partir apenas da observação de alguns exemplos. É possível que, para algum caso que não analisamos, aquele fato não se verifique.

*2. Resposta: (c) (note que a alternativa (c) fala de uma possibilidade, "a equipe V **pode** ser a campeã", enquanto que a alternativa (a) fala de uma certeza "a equipe V **será** a campeã", o que não pode ser afirmado, pois ainda faltam duas rodadas para o término do torneio).*

2

1. 6 *2. 5* *3. Resposta: (b)*

4. Cinco das oito casas da rua tiveram um aumento de mais de 100 KWh em suas contas de luz, de março para abril. Não havendo motivo aparente para tal aumento, solicitamos a visita de um técnico para verificar se há problemas na rede elétrica da rua.

3

1. Resposta: (a)

4

1. Resposta: (b) *2. Resposta: (d)*

5

1. Resposta: (b) *2. Resposta: (c)*

6

1. Resposta: (b) *2. Resposta: (d)*

7

360° (Note que o quadrilátero pode ser dividido em dois triângulos. Como a soma dos ângulos internos de cada triângulo é 180°, obteremos para o quadrilátero 180° + 180° = 360°).

8

$(a+b)^2 = (a+b) \,.\, (a+b) = a \,.\, a + a \,.\, b + a \,.\, b + b \,.\, b = a^2 + 2ab + b^2$

9

1. a) 5 . 5 = 25 *b) 10 . 10 = 100* *2. Resposta: (b)*

10

1. Resposta: (a) *2. Resposta: (c)*

Orientação final

Para saber se você compreendeu bem o que está apresentado neste capítulo, verifique se está apto a demonstrar que é capaz de:

- Identificar e interpretar conceitos e procedimentos matemáticos expressos em diferentes formas.
- Utilizar conceitos e procedimentos matemáticos para explicar fenômenos ou fatos do cotidiano.
- Utilizar conceitos e procedimentos matemáticos para construir formas de raciocínio que permitam aplicar estratégias para a resolução de problemas.
- Identificar e utilizar conceitos e procedimentos matemáticos na construção de argumentação consistente.
- Reconhecer a adequação da proposta de ação solidária, utilizando conceitos e procedimentos matemáticos.