RESUMÃO DE MATEMÁTICA PARA EsPCEx

Olá!

Veja abaixo um resumo com os principais assuntos para a prova da EsPCEx!

Bons estudos!

Prof. Hugo Lima
Prof. Arthur Lima

Equação de 1º grau

→ é do tipo $ax+b=0$. A raiz da equação é dada por $\frac{-b}{a}$.

Equação de 2º grau

→ é do tipo $ax^2+bx+c=0$, onde a, b e c são os coeficientes da equação, com $a \neq 0$.
→ as equações de segundo grau têm 2 raízes, obtidas pela fórmula de Báskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

chamamos de "delta" (Δ) a expressão b^2-4ac, que vai dentro da raiz quadrada. Podemos ter três casos:

- ➔ $\Delta>0$ → teremos sempre duas raízes reais para a equação
- ➔ $\Delta<0$ → não é possível obter a raiz quadrada → dizemos que não existem raízes reais para a equação de segundo grau.
- ➔ $\Delta=0$, a fórmula de Báskara fica $x=\frac{-b\pm 0}{2a}=\frac{-b}{2a}$ → teremos duas raízes idênticas.

Funções

1. Para obter a função inversa $f^{-1}(x)$, basta:
2. Substituir f(x) por x

3. Substituir x por $f^{-1}(x)$
4. Rearranjar os termos, isolando $f^{-1}(x)$.

A função inversa $f^{-1}(x)$ terá domínio e imagem correspondentes, respectivamente, à imagem e ao domínio de f(x).

Funções pares são aquelas em que f(-x)=f(x). Já as funções ímpares são aquelas para as quais f(x) = - f(x).

FUNÇÕES LINEARES (1º GRAU)

- função do tipo f(x) = ax + b
- têm como gráfico uma reta

a > 0 → a reta será crescente
a < 0 → a reta será decrescente

FUNÇÕES DE 2º GRAU (OU QUADRÁTICAS)

- função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$
- têm como gráfico uma parábola
  - ➔ a > 0 → a concavidade será para cima --> possui ponto de mínimo;
  - ➔ a < 0 → a concavidade será para baixo --> possui ponto de máximo.

Esse ponto de máximo ou mínimo da função de segundo grau é chamado de Vértice:

$$x_{vértice} = \frac{-b}{2a}$$

FUNÇÕES POLINOMIAIS

→ formada por uma soma de potências da variável x multiplicadas por coeficientes.

→ os expoentes de x são números naturais

→ os coeficientes são números reais

→ o grau do polinômio é dado pelo expoente de maior valor

→ as funções lineares são polinômios de 1º grau e as funções quadráticas são polinômios de 2º grau.

→ o grau de um polinômio determina o número de raízes que ele possui – lembrando que uma raiz é um valor de x que torna f(x) = 0.

→ as raízes podem pertencer ou não ao conjunto dos números reais. O número de raízes reais é também o número de vezes que o gráfico da função f(x) toca o eixo horizontal.

→ Teorema do Resto: o resto da divisão de um polinômio P(x) por um divisor na forma (x – a), onde "a" é uma constante qualquer, é dado por P(a).

FUNÇÕES EXPONENCIAIS

→ a variável x encontra-se no expoente. São funções do tipo:
f(x) = ax

→ o coeficiente "a" precisa ser maior do que zero, e também diferente de 1 (afinal 1 elevado a qualquer número é sempre igual a 1).

→ se a > 1 temos uma função é crescente.

→ se 0 < a < 1 temos uma função é decrescente.

LOGARITMO

→ propriedades que você deve memorizar:

a) $a^{\log_a^b} = b$

b) $\log_a b^n = n.\log_a b$

c) $\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$

d) $\log_a (b/c) = \log_a b - \log_a c$

e) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

→ são funções do tipo: f(x) = $\log_a(x)$

→ o coeficiente "a" precisa ser positivo (a > 0) e diferente de 1.

→ a função logarítmica é o inverso da função exponencial.

→ se a > 1 temos uma função é crescente.

→ se 0 < a < 1 temos uma função é decrescente.

GEOMETRIA PLANA

- o número de lados de um polígono é sempre igual ao número de vértices.
- se um polígono possui n vértices (ou lados), então o número de diagonais é dado pela fórmula abaixo:

$$D = \frac{n \times (n-3)}{2}$$

- a soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é:

$$S = (n-2) \times 180^o$$

Principais figuras geométricas e suas características mais relevantes:

Retângulo

A = b x h

Quadrado

$$A = L^2$$

Trapézio

$$A = \frac{(b+B)\times h}{2}$$

sendo b a base menor, B a base maior e h a altura.

Losango

$$A = \frac{D\times d}{2}$$

sendo d a diagonal menor e D a diagonal.

Paralelogramo

A = b x h

sendo que a altura h, como sempre, deve formar 90º com a base b

Círculo

$A = \pi \times r^2$ (área)

$P = 2\times \pi \times r$ (perímetro)

Triângulo

$$A = \frac{b\times h}{2}$$

- condição de existência de um triângulo: o comprimento do lado maior deve ser inferior à soma dos lados menores.

- Triângulo retângulo: possui um ângulo de 90º

$a^2 + b^2 = c^2$ (Teorema de Pitágoras)

sendo a e b os catetos e c a hipotenusa

Trigonometria

Seno de um ângulo:

$$Sen(\hat{A}ngulo) = \frac{Cateto\ Oposto}{Hipotenusa}$$

Cosseno de um ângulo:

$$Cos(\hat{A}ngulo) = \frac{Cateto\ Adjacente}{Hipotenusa}$$

Tangente de um ângulo:

$$Tan(\hat{A}ngulo) = \frac{Cateto\ Oposto}{Cateto\ Adjacente} = \frac{Sen(\hat{A}ngulo)}{Cos(\hat{A}ngulo)}$$

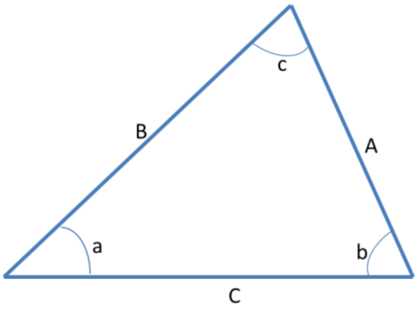
relação fundamental da trigonometria

$$sen^2(a) + cos^2(a) = 1$$

Relações trigonométricas importantes:

$$sen(a + b) = sen(a)cos(b) + sen(b)cos(a)$$
$$sen(a - b) = sen(a)cos(b) - sen(b)cos(a)$$
$$cos\ (a + b) = cos(a)cos(b) - sen(a)sen(b)$$
$$cos\ (a - b) = cos(a)cos(b) + sen(a)sen(b)$$
$$sen(2a) = 2\ sen(a)cos(a)$$
$$cos(2a) = cos2(a) - sen2(a)$$

Leis que relacionam lados e ângulos de um triângulo qualquer



a) Lei dos senos:

$$\frac{sen(A)}{a} = \frac{sen(B)}{b} = \frac{sen(C)}{c}$$

b) Lei dos cossenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$$
ou
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(B)$$
ou
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C)$$

Decore a tabela abaixo com os valores de seno, cosseno e tangente dos principais ângulos!

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
0º	0	1	0
30º	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45º	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60º	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
90º	1	0	infinito

GEOMETRIA ESPACIAL

Poliedros: são aquelas figuras espaciais formadas por várias faces, cada uma delas sendo um polígono.

Relação de Euler: Vértices + Faces = Arestas + 2

Vejamos os principais poliedros:

→ Paralelepípedo

Volume = Ab x H

→ Cubo

Se o cubo tiver lado A: Volume = A^3

→ Cilindro

Volume = Ab x H

Só que neste caso a área da base é dada por $Ab = \pi R^2$

Superfície lateral do cilindro – é dada por um retângulo de lados H (altura do cilindro) e $C = 2\pi R$. Assim, a área lateral do cilindro é:

$$A_{lateral} = HxC = Hx2\pi R$$

→ Cone

Dado que a altura do cone é H e a área da base é $Ab = \pi R^2$, então o seu volume é:

$$V = \frac{Ab \times H}{3}$$

Geratriz (G): o segmento de reta que liga a ponta até a extremidade da base.

Área lateral do cone = π xGxR

→ Pirâmide

$$V = \frac{Ab \times H}{3}$$

→ Prisma

V = Ab x H

→ Esfera

$$V = 4\pi R^3/3$$

A área da superfície da esfera é:

$$A = 4\pi R^2$$

GEOMETRIA ANALÍTICA
DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

distância (d) entre os pontos A (xa, ya) e B (xb, yb):

$$(xa - xb)^2 + (ya - yb)^2 = d^2$$

PONTO MÉDIO

o ponto médio entre A(x, y) e B(z,w) é dado por PM(xm, ym) em que:

$$xm = (x+z)/2$$
$$ym = (y+w)/2$$

DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA

ponto P(x0,y0) e a reta r cuja equação é ax + by + c = 0:

$$d = \frac{|a.x_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

CIRCUNFERÊNCIAS

Equação da circunferência de centro em C (xc, yc) e raio R:

$$(x - xc)^2 + (y - yc)^2 = R^2$$

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

Termo geral da PA:

$$a_n = a_1 + r \times (n-1)$$

Soma do primeiro ao n-ésimo termo:

$$S_n = \frac{n \times (a_1 + a_n)}{2}$$

PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

Termo geral da PG:

$$a_n = a_1 \times q^{n-1}$$

Soma do primeiro ao n-ésimo termo:

$$S_n = \frac{a_1 \times (q^n - 1)}{q - 1}$$

Soma dos infinitos termos: quando |q| < 1:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$

ANÁLISE COMBINATÓRIA

Permutação simples

→ arrumar "n" elementos em "n" posições distintas, sendo que a ordem de arrumação dos elementos diferencia uma possibilidade da outra:

$$P(n) = n!$$

→ caso particular: arrumar "n" elementos em "n" posições distintas, com repetição de m e p. Trata-se da permutação com repetição.

$$PR(n\ ;\ m\ e\ p) = \frac{n!}{m! \times p!}$$

Arranjo simples

→ arrumar "n" elementos em "m" posições (m<n), onde a ordem dos elementos diferencia uma possibilidade da outra:

$$A(n,m) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Combinação

→ combinar n elementos, m a m, onde a ordem dos elementos NÃO diferencia uma possibilidade da outra, ou seja, a ordem não importa:

$$C(n,m) = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Dicas Finais de Análise Combinatória
-> Diante de um exercício, a primeira coisa que você deve identificar é se a ordem é relevante, ou seja, se a ordem torna uma disposição diferente da outra.
-> Ordem irrelevante: combinação
-> Ordem relevante: permutação ou arranjo. A diferença vai ser se estão envolvidos todos os elementos disponíveis (permutação) ou apenas alguns (arranjo).

PROBABILIDADE

$$\text{Probabilidade do Evento} = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número total de resultados}}$$

Eventos independentes
→ O resultado de um evento em nada influencia o resultado de outro evento.

$$P\ (A\ e\ B) = P(A) \times P(B)$$

Eventos mutuamente exclusivos

→ São eventos que, se ocorrerem, excluem a possibilidade de ocorrência de outro.

$$P(A \cap B) = 0$$

União de dois eventos

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

→ Em caso de eventos mutuamente exclusivos, sabemos que $P(A \cap B) = 0$, o que nos leva a:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Dica: quando utilizamos o E (probabilidade dos eventos A e B acontecerem) basta multiplicar as probabilidades de cada evento. Já quando utilizamos o OU (probabilidade dos eventos A ou B), basta somar as probabilidades de cada evento. Isso só vale para probabilidade de eventos independentes (no caso do E) ou mutuamente excludentes (no caso do OU) – mas a grande maioria dos exercícios são assim.

Eventos complementares

→ a probabilidade de um evento ocorrer é igual a 100% menos a probabilidade do seu complemento ocorrer.

MATRIZES E DETERMINANTES

Inversa de uma matriz A: é representada pela matriz A-1 e é tal que:

A x A-1 = I

Determinante de uma matriz quadrada nxn é um número a ela associado, a depender do valor de n:

n = 1 → o determinante é o próprio termo que forma a matriz

n = 2 → o determinante é dado pela subtração entre o produto da diagonal principal e o produto da diagonal secundária.

n = 3 → o determinante é calculado da seguinte forma:

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

Propriedades do determinante:

→ det A = det AT

→ se uma fila (linha ou coluna) de A for toda igual a zero, det(A) = 0

→ se multiplicarmos todos os termos de uma linha ou coluna de A por um valor "k", o determinante da matriz será também multiplicado por k;

→ se multiplicarmos todos os termos de uma matriz por um valor "k", o determinante será multiplicado por kn, onde n é a ordem da matriz;

→ se trocarmos de posição duas linhas ou colunas de A, o determinante da nova matriz será igual a –det(A);
→ se A tem duas linhas ou colunas iguais, então det(A) = 0
→ sendo A e B matrizes quadradas de mesma ordem, det(AxB) = det(A) x det(B)
→ det(An) = (detA)n
→ uma matriz quadrada A é inversível se, e somente se, $\det(A) \neq 0$
→ se A é uma matriz inversível, det(A-1) = 1/det(A)

SISTEMAS LINEARES

Num sistema linear de três incógnitas e três equações, para obtermos os valores de x, y e z, devemos:

- ➔ Calcular o determinante da matriz dos coeficientes, que chamaremos de D.
- ➔ Substituir os coeficientes de x na matriz dos coeficientes pelos respectivos valores da matriz de resultados, obtendo o determinante desta nova matriz, que chamaremos de Dx.
- ➔ Repetir o procedimento anterior para y e z, encontrando Dy e Dz.

Os valores x, y e z que representam a solução deste sistema linear serão:

$$x = \frac{Dx}{D}, \quad y = \frac{Dy}{D} \quad \text{e} \quad z = \frac{Dz}{D}$$

Classificação dos sistemas lineares:

a) se D diferente de 0, então o sistema é possível e determinado → podemos obter valores únicos para x, y e z;
b) se D = Dx = Dy = Dz = 0, então o sistema é possível e indeterminado → existem infinitos valores possíveis para x, y e z;
c) se D = 0 e pelo menos um dos demais determinantes (Dx, Dy e/ou Dz) for diferente de zero, então o sistema é impossível → não existem valores x, y e z que resolvem o sistema.