Escolha ótima do consumidor: a demanda.

Olá estimado(a) aluno(a), tudo bem?

O objetivo deste artigo é apresentar algumas questões relacionadas à demanda. Ou seja, compreender de forma esquematizada qual o processo por trás da escolha do consumidor: preferências, maximização da utilidade, o quanto consome e o que consome.

O tema vem sendo cobrado rotineiramente em provas de concursos. E mais, as questões, em certas ocasiões, são apresentadas com "requintes de crueldade", pois são resolvidas apenas com a utilização de ferramentas do cálculo matemático, como a otimização condicionada (multiplicador de Lagrange). É este caminho que iremos trilhar nestas quase 50 páginas.

Sem mais delongas, podemos iniciar nossos estudos.

Espero que goste!

Antes de iniciarmos, um aviso importante:

Aviso: Este artigo não substitui os cursos que ministro e nem pretende ser uma aula sobre o assunto. É recomendável a quem quiser estudar a disciplina mais a fundo buscar pelos materiais relacionados aqui!

Os que se interessarem podem me acompanhar nas redes sociais e nas minhas páginas pessoais. Semanalmente publico textos, vídeos, questões comentadas de concursos, entre outras novidades. É só clicar nos links abaixo.

Facebook
Estratégia Concursos

1. PREFERÊNCIAS: CONCEITOS INICIAIS E PRESSUPOSTOS

As preferências do consumidor consistem no aspecto psicológico da demanda.

Nada adianta o consumidor apresentar restrição orçamentária compatível com cesta de bens disponível para consumo se ele não se interessar (não preferir) a referida cesta.

É interessante notar que a preferência do consumidor deve ser analisada por diversos ângulos. O mesmo bem possui funções distintas dependendo da localização em que se encontra, do período em que é demandado etc. Em resumo, **as preferências são circunstanciais**, visto que os consumidores podem valorizar o mesmo de modo distinto a depender da circunstância presente.

Um simples exemplo pode ser citado. Imagine a diferença de utilidade de um guarda chuva em Londres/Reino Unido e no Deserto do Saara. No primeiro lugar é certamente um bem de extremo valor; no segundo, nem tanto.

Para padronizar a questão e permitir a análise, existem maneiras de se representar as preferências assim como certos pressupostos lógicos.

Continuamos com nosso consumidor, só que, desta vez, ele pode demandar duas (ou mais) cestas de bens distintas, representadas por $X = (x_1, x_2)$ e $Y = (y_1, y_2)$. É necessário ao menos duas cestas, visto que precisamos compará-las para saber a preferência do consumidor.

A comparação entre cestas é feita por meio dos seguintes símbolos:

✓ O símbolo $\succ$ representa o conceito **estritamente preferido**. Assim, se $X \succ Y$, o consumidor prefere estritamente X a Y (ele deseja a cesta X ao invés da Y).

✓ O símbolo $\sim$ quer dizer **indiferente**. Se para o consumidor X $\sim$ Y, ele se mostra indiferente entre escolher uma ou outra. Ou seja, para ele tanto faz, visto que as duas cestas o atendem igualmente.

✓ O símbolo $\succcurlyeq$ quer dizer **fracamente preferível**. O significado deste conceito é simples: quer dizer que o consumidor prefere ambas as cestas ou mostra-se indiferente na escolha de ambas. Desta forma, a preferência de uma cesta por outra é fraca.

As provas tentam, em certos momentos, confundir os candidatos. Assim, relacionam estes conceitos entre duas cestas.

Por exemplo, digamos que a prova indique que X $\succcurlyeq$ Y e que Y $\succcurlyeq$ X. Se uma cesta é fracamente preferível a outra de maneira recíproca, que dizer que elas são indiferentes. Assim, X $\sim$ Y (o consumidor considera X tão boa quanto Y e também considera Y tão boa quanto X: ou seja, as cestas são indiferentes).

Do mesmo modo, caso X $\succcurlyeq$ Y e não X não indiferente à Y, podemos concluir que X é estritamente preferível a Y (X $\succ$ Y).

Quase sempre estes tipos de relação são logicamente inferidos. Afinal, a teoria do consumidor é construída também sobre preceitos lógicos.

Continuando, há que se analisar alguns pressupostos feitos sobre as preferências. De certa maneiras, as preferências precisam ser consistentes, caso contrário a teoria perde o valor.

Não seria muito razoável afirmar que o consumidor prefere consumir frutos do mar à pão francês, e pão francês à salada, mas prefere salada à frutos do mar. Este tipo de escolha não apresenta muita consistência, além de complicar a análise.

Existem 3 pressupostos que são considerados axiomas da teoria do consumidor:

1. Completa ➔ O mais fundamental dos pressupostos. A completude de uma preferência indica a possibilidade de comparação entre cestas de consumo, ou seja, indica que o consumidor pode escolher. Sendo completa, uma escolha (cesta de bens) é passível de ser comparada com outra.

2. Reflexiva ➔ A preferência é reflexiva quando uma cesta de consumo é tão boa quanto ela mesma. Até parece bobagem apresentar este pressuposto, mas é isto mesmo. Se uma cesta é tão boa quanto ela mesma, o consumidor tem garantia que irá a escolher na ausência de outras cestas.

3. Transitiva ➔ A transitividade de uma preferência é o exemplo citado acima. Se o consumidor prefere frutos do mar à pão francês e este à salada, provavelmente irá preferir frutos do mar à salada.

A representação deste pressuposto é feita da seguinte forma: se $X \succcurlyeq Y$ e $Y \succcurlyeq Z$, então $X \succcurlyeq Z$.

2. CURVAS DE INDIFERENÇA

Os conceitos iniciais e pressupostos apresentados podem ser descritos da forma gráfica.

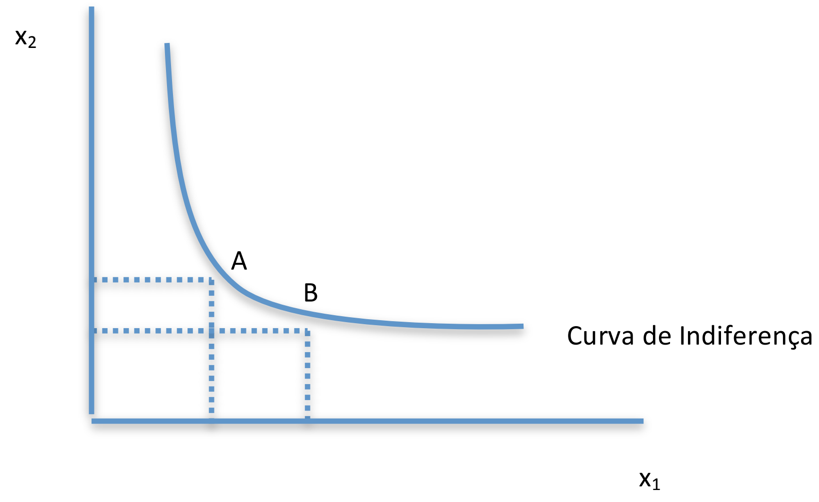
Dito de outro modo, as preferências podem ser apresentadas de maneira gráfica, o que facilita (e muito!) nossa análise, além de servir de bom demonstrativo da ideia de "matematizar" a teoria microeconômica.

Assim, é comum utilizarmos as **curvas de indiferença**.

Seguindo o conceito de indiferença, a curva de indiferença apresenta as cestas em que o consumidor apresenta indiferença. Tanto faz uma, ou outra. Mais adiante, no tópico sobre utilidade, veremos que cada curva de indiferença apresenta uma utilidade ao consumidor, ou seja, elas podem ser quantificadas.

No momento, cabe-nos compreender as formas e propriedades das curvas de indiferença.

Vamos iniciar a partir da curva de indiferença clássica (negativamente inclinada e de formato convexo):



O eixo vertical do gráfico apresenta as quantidades demandadas de x_1. O eixo horizontal, quantidades demandas de x_2.

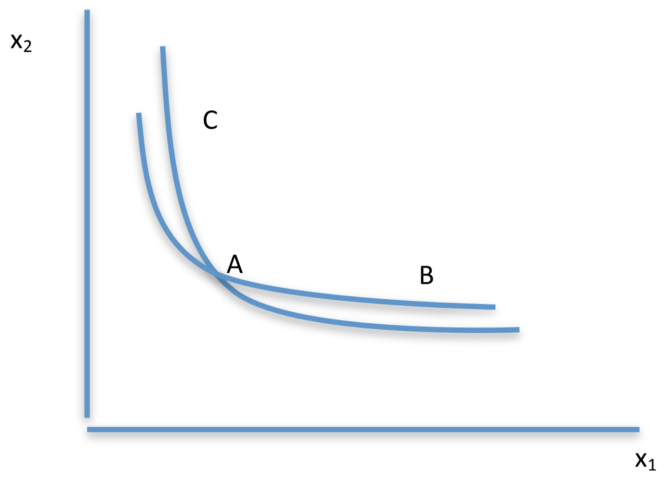
Desta forma, os pontos A e B são cestas que apresentam combinações distintas, mas indiferentes ao consumidor. É perceptível que a cesta B apresenta quantidade superior de x_1 e quantidade inferior de x_2, quando comparada à cesta A.

Os pontos acima e à direita da curva de indiferença apresentam cestas fracamente preferíveis às cestas da curva. Evidente que, abaixo e à esquerda, estão situadas cestas não preferíveis, afinal elas representam quantidades inferiores de bens (conferem menor utilidade ao consumidor).

Bom, podemos concluir um ponto apenas com estas ideias básicas. Se a curva de indiferença apresenta cestas indiferentes ao consumidor, duas curvas não podem se cruzar.

Ora, se isto ocorresse, as duas curvas conteriam cesta de consumo que apresentam utilidades diferentes, mas mesmo assim são indiferentes. É um caso sem lógica.

Portanto, atenção ao fato: **curvas de indiferença não se cruzam!** Esta evidente contradição pode ser apresentada graficamente como segue:



A cesta de consumo (x_1, x_2) indicada no ponto A apresenta a contradição. Se isto fosse possível, as cestas B e C teriam todas de ser indiferentes umas às outras, mesmo se situando em curvas de indiferença diferentes, que apresentam níveis de utilidade distintos.

Continuando, temos que a curva apresentada acima é a forma padrão, mas não única, de curva de indiferença. **Ela indica preferências convexas (que veremos logo mais o significado), demonstrando que, para obter mais de 1 bem, o consumidor precisa abrir mão do outro à taxa decrescente.**

Ou seja, a taxa de troca entre os bens é negativa (mais de um bem requer menos do outro), implicando em curva negativamente inclinada. No entanto, a taxa de troca entre os bens é decrescente à medida que nos deslocamos à direita a curva. Este pressuposto é lógico: se você possui muitas quantidades de x_2 e poucas de x_1, por exemplo, está disposto a abrir mão do bem 2 por unidades do bem 1. Mas, à medida que passar a ter cada vez menos unidades de 2, precisa de mais unidades do bem 1 para continuar com as trocas. Ou seja, sua disposição em abrir mão do bem 2 é decrescente.

Um simples numérico pode ajudar a compreender. Digamos que no início das trocas, o consumidor troca 1 unidade de bem 2 por 1 unidade do bem 1 (a taxa de troca $\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ é 1). Após já ter realizado algumas trocas, ficando, portanto, com menos do bem 2 e mais do bem 1, o consumidor passa a exigir mais unidades do bem 1 para abrir mão do bem 2. Digamos que agora ele troque 1 unidade do bem 2 por 2 unidades do bem 1(a taxa de troca $\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ é 0,5).

No limite, ele irá exigir infinitas unidades do bem 1 para abrir mão de mais 1 unidade do bem 1. Como, por definição, os bens são escassos (não infinitos), a taxa de troca será zero neste caso.

Já deu para perceber, neste caso, o porquê a taxa de troca é decrescente, não é?!

Continuando, podemos citar 3 formas de curvas de indiferença, que além de serem as cobradas em provas, indicam como os bens se relacionam entre si.

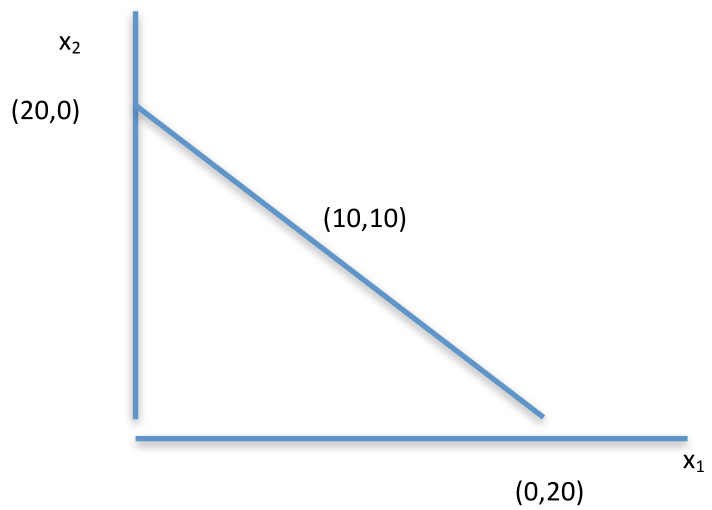
Vejamos.

Substitutos Perfeitos

Um bem é perfeitamente substituível por outro quando ambos possuem as mesmas finalidades (servem ao mesmo objetivo). Assim, o consumidor troca um por outro sem quaisquer problemas.

Substitutos perfeitos possuem curva de indiferença com inclinação constante. Ou seja, o consumidor substitui um bem pelo outro à taxa constante. Assim como no exemplo acima citado, a curva de indiferença possui inclinação negativa, afinal mais de um bem resulta em menos do outro sempre na mesma taxa.

Digamos que o consumidor não se importa com as cores de camisa que utiliza. Assim, para ele, tanto faz consumir 1 unidade de camisa preta, ou 1 unidade de camisa branca. Assim, ele substitui 1 unidade de uma delas por 1 unidade da outra (taxa de substituição constante de 1). O gráfico tem a seguinte forma:



No caso acima apresentado, nosso consumidor demanda 20 camisas. Ele pode escolher 10 unidades da camisa preta (x_2) com 10 unidades da camisa branca (x_1), escolher 20 de apenas uma cor, ou mesmo distribuir seu consumo por, digamos, 11 unidades de camisas brancas e 9 unidades de camisas pretas.

É importante notar que ele sempre troca as camisas à taxa de 1. Ou seja, os dois bens são substitutos perfeitos pois a taxa de troca é constante por toda a análise.

Mas, não se engane: **a taxa não precisa ser de 1; ela pode ser qualquer número, desde que constante!**

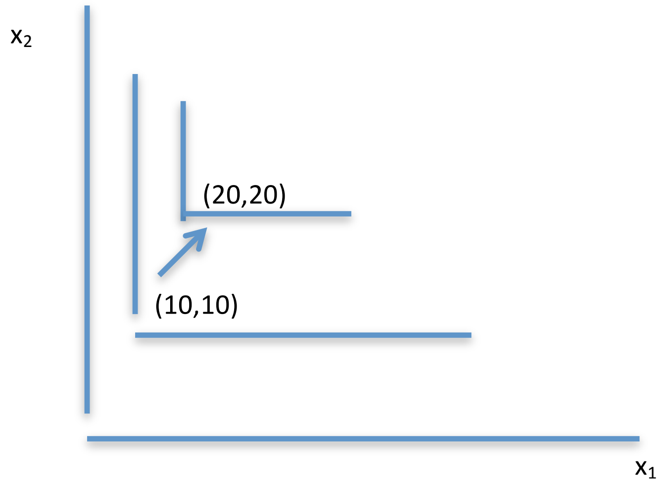
Complementares Perfeitos

Os bens complementares são aqueles, como o nome sugere, cuja **demanda de um é complementar a demanda do outro**. Dito de outro modo, um bem é complementar a outro, quando **são consumidos juntamente em proporções fixas.**

É o caso clássico dos pares de sapato. Em geral, a demanda do pé direito de sapato é feita juntamente ao pé esquerdo. Ou seja, para cada 1 pé direito demandado, demanda-se também 1 unidade do pé esquerdo.

Consumir 2 pés direitos e 1 pé esquerdo, por exemplo, não traz qualquer aumento de utilidade para o consumidor. Desta forma, a curva de indiferença que representa bens complementares perfeitos possui formato em **L**, sendo o ponto de demanda o vértice da curva.

Vejamos:



Só faz sentido ao consumidor consumir, por exemplo, 10 pés direitos juntamente com 10 pés esquerdos (ou seja, 10 pares de sapato). Se ele desejar aumentar o consumo, nada adianta demanda 12 pés direito e 10 pés esquerdo. Ele deve, necessariamente, demandar uma combinação lógica que redunde em número de pares de sapato, como, por exemplo, 20 unidades de cada pé.

Desta forma, apenas os vértices apresentam solução interessante ao consumidor, demonstrando o ponto em que ele se situa quando demanda bens perfeitamente complementares. Afinal, como afirmado, a demanda é feita conjuntamente em proporções fixas.

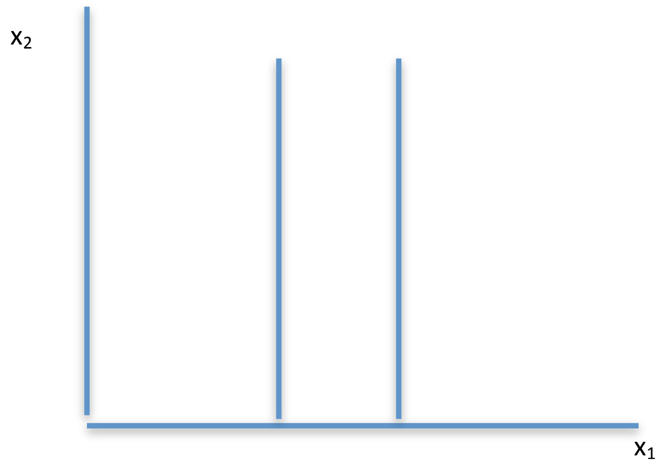
Cabe ressaltar que não é necessário que a proporção fixa seja de 1:1. Ela pode ser, digamos, de 2:1 (a cada 2 unidades de x_2 é consumida 1 unidade de x_1). O importante é que apresenta estas proporções fixas por toda a análise.

Neutros

Um bem neutro é aquele que o consumidor não em importa em consumidor. Assim, se ele deseja demandar 10 unidades de cerveja, tanto faz a quantidade de refrigerantes que acompanha a demanda por cervejas.

O consumidor se importa apenas com a demanda por cervejas, se mostrando neutro frente ao refrigerante.

Este tipo de curva de indiferença possui a seguinte forma:



Em nosso exemplo, x1 representa unidades de cervejas e x2, refrigerantes. O consumidor quer mesmo é saber de cervejas e a curva de indiferença denota isto, visto que a quantidade fixada está no eixo horizontal. A quantidade de refrigerantes pouco importa

Evidente que, caso ele preferisse refrigerantes, a curva seria horizontal, demonstrando indiferença por qualquer quantidade de cerveja.

3. TAXA MARGINAL DE SUBSTITUIÇÃO

O conceito de taxa marginal de substituição está implícito por toda a aula.

Os consumidores, via de regra, pretendem consumir bens diferentes, ou seja, apresentam cestas de consumos balanceadas (não especializadas) entre os bens disponíveis. Isto é algo trivial: você prefere gastar toda sua renda com verduras, ou dividir entre legumes, verduras, carnes, grãos e outros alimentos?

Evidente que a cesta balanceada é preferível à especializada somente em verduras.

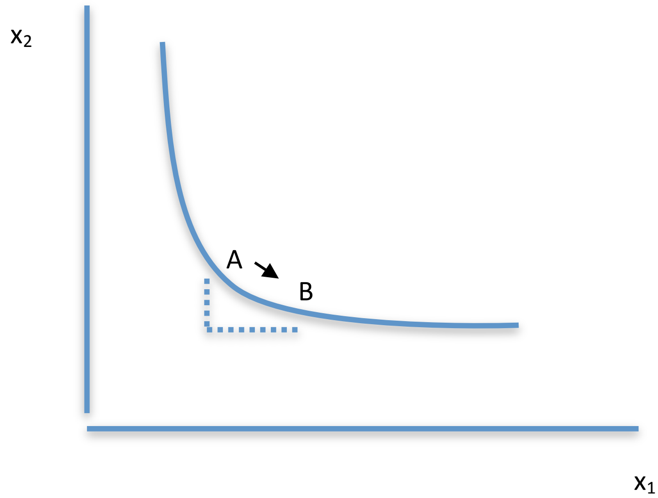
No então, o consumidor não possui recursos ilimitados para demandar o que bem entender. Ou mesmo os bens não possuem dotações infinitas para serem demandados.

Dito de outro modo, ao balancear sua cesta de consumo, **o consumidor necessita trocar um bem pelo outro.** O valor numérico desta taxa é a taxa marginal de substituição.

Definindo, **taxa marginal de substituição do bem 2 pelo bem 1 é a medida que representa quantas unidades do bem 2 o consumidor precisa abrir mão para demandar uma unidade adicional do bem 1, respeitando a mesma curva de indiferença** (atenção para o fato que continuamos utilizando a cesta de bens (x_1,x_2) na análise).

Dito de outro modo, a taxa mede quantas unidades do bem 1 o consumidor precisa ganhar para ser recompensado pelo sacrifício em demandar menores quantidades do bem 2. É importante ter em mente que, na microeconomia, consumo representa utilidade (assim, abrir mão do consumo é prejudicial ao consumidor).

Podemos visualizar este conceito através do gráfico:



A passagem do ponto A para o ponto B indica o que acabamos de tratar. O consumidor deixa de consumir certas quantidades do bem 2, sendo compensado pela demanda adicional do bem 1. **A manutenção na mesma curva de indiferença indica que a situação do consumidor permanece a mesma (mesma utilidade antes e depois da troca).**

Neste exemplo podemos calcular a taxa marginal de substituição da seguinte forma:

$$\boldsymbol{TMS_{2,1} = -\frac{\Delta x2}{\Delta x1}}$$

Primeiro comentário: a TMS é negativa, pois adquirir mais unidades do bem 1 requer abrir mão de unidades do bem 2; ou seja, os dois bens estão relacionados negativamente nesta escolha.

Segundo comentário: abrir mão do bem 2 para adquirir uma unidade marginal adicional do bem 1 é representado pelo índice (2,1); se quiséssemos saber o contrário, o índice se inverteria para (1,2), assim como a expressão, ficando: $\boldsymbol{TMS_{1,2} = -\frac{\Delta x1}{\Delta x2}}$.

Terceiro comentário: a taxa é marginal, pois representa quanto preciso abrir mão de um bem para obter um consumo adicional marginal de outro (como bens, em regra, são medidos através de unidades, o termo marginal indica 1 unidade adicional, ou 1 grama adicional, ou 1 litro adicional e assim por diante, dependendo da unidade de medida utilizada.)

Que tal dois exemplos?

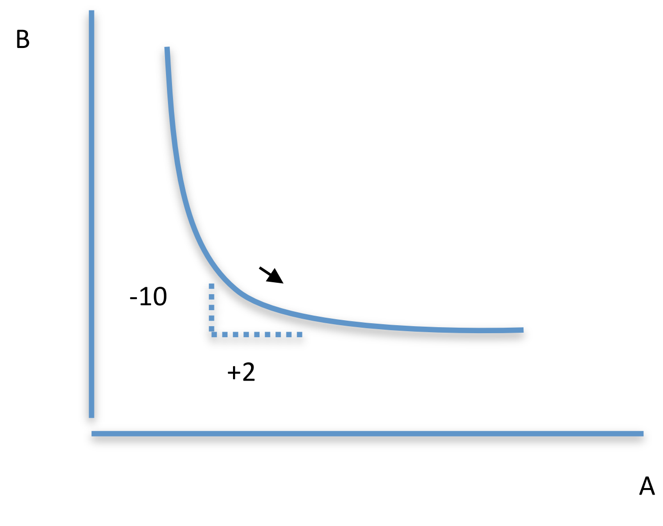
Exemplo 1: O consumidor demanda 50 unidades de bebidas/mês e 10 unidades de alimentos no mesmo período. Se quiser demandar 12 unidades de alimentos, reduz seu consumo de bebidas em 10 unidades. Qual a TMS entre bebidas e alimentos?

$$TMS_{B,A} = -\frac{\Delta xB}{\Delta xA}$$

$$TMS_{B,A} = -\frac{10}{2}$$

$$TMS_{B,A} = -5$$

Graficamente:



Exemplo 2: Considerando os mesmos dados do item anterior, qual a TMS entre alimentos e bebidas?

$$TMS_{A,B} = -\frac{\Delta xA}{\Delta xB}$$

$$\boldsymbol{TMS_{A,B} = -\frac{5}{10}}$$

$$\boldsymbol{TMS_{A,B} = -\frac{1}{5}}$$

Ou seja, a taxa marginal de substituição entre alimentos e bebidas é igual ao inverso da taxa marginal de substituição entre bebidas e alimentos.

Ou seja:

$$\boldsymbol{TMS_{B,A} = \frac{1}{TMS_{A,B}}}$$

Agora, vamos continuar no exemplo 1. Digamos que o consumidor queira abrir mão de um pouco mais de bebidas para obter alimentos. No entanto, ele faz este procedimento a uma taxa de substituição menor. Afinal, ele já possui mais alimentos e, mesmo querendo mais, está disposto a abrir mão de menor quantidade de bebidas para obter uma unidade marginal adicional de alimentos.

Numericamente, ele está disposto a abrir mão de 3 unidades de bebidas para obter 1 unidade adicional de alimentos. A TMS é a seguinte:

$$\boldsymbol{TMS_{B,A} = -\frac{3}{1}}$$

$$\boldsymbol{TMS_{B,A} = -3}$$

Percebe que a TMS diminuiu? Pois bem, esta é uma característica de TMS para curvas de indiferença estritamente convexas, como veremos no tópico a seguir.

Nestes casos, a TMS é decrescente. À medida que o consumidor demanda menos bebida, ele precisa de quantidades maiores de alimento para deixar de consumir uma unidade adicional de bebida.

Este fato pode ser percebido através da forma da curva de indiferença. Repare que, quando o consumidor se desloca da esquerda para a direita, ele parte de trecho da curva altamente inclinado (vertical) para outro pouco inclinado (horizontal).

Trechos verticais de curvas possuem inclinação muito elevada, ao passo que trechos horizontais possuem inclinação próxima de zero. desta forma, consumidor sair de um ponto com inclinação elevada e se dirige a outro com inclinação próxima de zero. ou seja, a inclinação, assim como a TMS, é decrescente

4. PREFERÊNCIAS BEM COMPORTADAS

Mesmo sabendo da existência de diversas preferências, representadas por várias formas de curvas de indiferença, os economistas gostam de tentar achar um padrão para facilitar a vida.

Para tanto, **alguns pressupostos são assumidos para delinear preferências bem comportadas, que são aquelas que representam certa razoabilidade**. Mesmo que as curvas de indiferença apresentem formatos distintos, alguma razoabilidade deve existir. E, estas preferências razoáveis, podem ser chamadas de preferências bem comportadas.

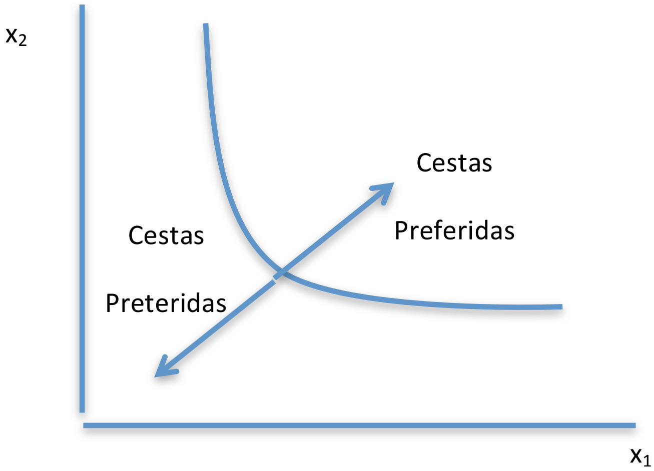
Preferências bem comportadas devem atender, ao menos, dois pressupostos:

✓ **Mais é melhor do que menos ➔** Acho que já captou a ideia, não é?! Cestas que representam mais bens são preferíveis a outras que representam menos.

Esta suposição é chamada de **monotonicidade**, ou de **preferências monotônicas**.

Apesar do difícil nome, a essência é simples. Se o consumidor tiver a chance de consumir duas cestas (x_1,x_2) e (y_1,y_2), sendo que esta apresenta mais bens do que aquela, ele irá demandar (y_1,y_2). Assim, $(y_1,y_2) \succ (x_1,x_2)$.

Preferências monotônicas resultam em curva de indiferença com inclinação negativa. Afinal, à direita e acima da curva estão cestas preferidas, enquanto abaixo e à esquerda, curvas preferidas (se a curva fosse positivamente inclinada – formato ascendente – esta relação não seria possível).



✓ **Cestas médias são preferíveis a cestas extremas ➔** O consumidor prefere consumir uma cesta que apresenta uma combinação de itens a consumir outra que representa quantidades de apenas 1 bem (cestas especializadas).

Este pressuposto é muito intuitivo. Em nosso consumo cotidiano, não consumimos apenas unidades de 1 alimento. Quase sempre preferimos cestas com vários itens de alimentos. Esta é a ideia.

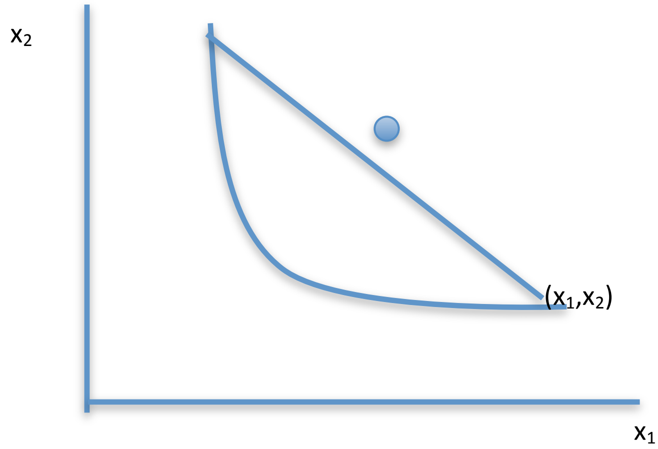
Assim, podemos representar as cestas de consumo de maneira ponderada: quanto é gasto em cada bem. Digamos que a ponderação é dada por ***t***. Assim, considerando as cestas especializadas (x_1,x_2) e (y_1,y_2), o consumidor prefere o consumo ponderado entre as duas cestas, ao invés do consumo especializado de apenas 1 delas. Este fato é comumente representado como segue:

$$(tx_1 + (1 - t)y_1 ; tx_2 + (1 - t)y_2) \succcurlyeq (x_1,x_2)$$

$$(tx_1 + (1 - t)y_1 ; tx_2 + (1 - t)y_2) \succcurlyeq (y_1,y_2)$$

Como já afirmado, t representa o peso na cesta. Assim, se t = 0,5, podemos afirmar que o consumidor prefere as cestas médias do que a cestas especializadas. Graficamente:

(x_1,x_2)



A cesta média está representada pelo ponto, sendo preferível às cestas (x_1,x_2) e (y_1,y_2).

Este pressuposto indica que, do ponto de vista geométrico, **as curvas de indiferença são convexas.**

Do contrário (se côncavas), o ponto médio estaria abaixo da curva de indiferença, representando uma cesta preterida, conforme explicado no pressuposto anterior.

Deste modo, a curva de indiferença bem comportada é convexa. Este fato é totalmente compatível com a ideia de consumo conjunto de bens, sendo normal ao consumidor demandar um pouco de cada bem, ao invés de desejar tudo de um e nada de outro.

Por fim, cabe citar a existência de dois tipos de convexidade: **a convexidade estrita (gráfico que acabamos de analisar) e a convexidade comum (curva de bens substitutos)**.

Na primeira delas, **a cesta média é estritamente preferível às cestas especializadas**. É o caso de curva de indiferença com inclinação negativa e decrescente em todo seu formato, como a apresentada acima. Como afirmado, em toda a curva, a cesta média é preferível.

Já a curva de convexidade comum é aquela que apresenta determinadas partes planas, como no caso da curva de indiferença para bens substitutos perfeitos. Assim, a preferência entre bens substitutos perfeitos, mesmo que convexas, podem acarretar em consumo especializado. Se, por exemplo, o preço de um dos bens aumenta, o consumidor irá se especializar no outro. Mas, se o preço dos dois permanece igual, talvez ele prefira uma combinação de ambos.

5. UTILIDADE: CONCEITOS INICIAIS

O conceito de utilidade está intrinsecamente ligado ao conceito de preferências.

De acordo com o princípio da monotonicidade (preferências monotônicas), uma cesta com mais consumo é preferível a outra com menos: a cesta com mais bens representa mais utilidade.

Desta forma, **a utilidade pode ser vista como uma forma de descrever as preferências.**

A relação entre preferências e utilidades pode ser encarada da seguinte forma:

1. O consumidor faz suas escolhas de consumo de acordo com suas preferências – as preferências são o aspecto fundamental na determinação do consumo

2. A utilidade do consumidor é uma maneira (mas não a única) de determinar diretamente a preferência do consumidor e, indiretamente, sua escolha

E como calculamos a utilidade?

Ora, através da função utilidade!

A função utilidade é um modo de atribui um valor numérico a cada cesta de consumo. Evidentemente, cestas com maior utilidade são preferíveis às cestas com menor utilidade.

De forma simples e objetiva:

(x1,x2) é preferível à (y1,y2) se e somente se $u(x_1, x_2) \succ u(y_1, y_2)$

É possível ler a afirmação acima do seguinte modo**: a cesta com os bens x1 e x2 é preferível à cesta com os bens y1 e y2, se a utilidade proporcionada pelo consumo dos bens x1 e x2 é**

superior à utilidade derivada através do consumo dos bens y1 e y2.

Assim, é de grande importância saber que a utilidade hierarquiza as preferências. Cestas com mais utilidade, de acordo com o princípio da monotonicidade, são preferíveis a outras com menos: **as cestas podem ser ordenadas (utilidade ordinal).**

Para nossos fins não é necessário saber qual a magnitude de diferença desta ordenação. Não importa saber, por exemplo, o quanto mais elevada é a preferência de uma cesta que confere 10 unidades de utilidade à outra que confere 5. Dito de outro modo, a utilidade cardinal não nos interessa, pois o que vale é a ordenação das cestas para fins de preferência.

Que tal um exemplo para ilustra estes primeiros conceitos?

Vamos tomar a tabela abaixo com dois exemplos de preferências:

CESTAS	**U_1**	**U_2**
A	10	-2
B	8	-3
C	6	-4

Os dois exemplos de utilidade U_1 e U_2 são maneiras corretas de descrever as preferências. Digamos que U_1 representa utilidades para João, enquanto U_2 tem o mesmo significado para Pedro.

Nos dois casos a cesta A é preferível à cesta B, assim como B é preferível à C (pois uA > uB > uC).

Cabe notar que, para Pedro, as cestas conferem utilidades negativas. É o caso, por exemplo, de cestas que contém bens que representam males para Pedro – por exemplo, poluição. Como a cesta A representa uma utilidade negativa inferior às outras, ela é preferível.

É também importante notar também o conceito de **transformação monotônica**. Utilizando a ordenação de João, podemos multiplicar as utilidades por 2. O valor da utilidade aumenta, mas a ordenação das cestas é mantida. **Caso haja variação no valor das utilidades, mas se mantenha a ordenação das cestas, haverá transformação monotônica.**

Pela tabela:

CESTAS	**U_1**	**$2(U_1)$**
A	10	20
B	8	16
C	6	12

A transformação monotônica das utilidades de João resultou no aumento em 2 vezes nos valores, mas a ordenação das cestas permaneceu, ou seja, uA > uB > uC se manteve.

As bancas costumam tentar confundir os candidatos sobre este conceito. Portanto, segue apresentada a forma geral de uma transformação monotônica, assim como uma explicação definitiva sobre o tema:

1. **Se $u_1 > u_2$, então $f(u_1) > f(u_2)$**

2. **Desta forma, f(u(x1,x2) > f(u(y1,y2) se, e somente se, $(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$, de modo que a função f(u) represente as preferências da mesma forma (e na mesma ordem) que a função original u(x1,x2)**

6. UTILIDADE MARGINAL E TAXA MARGINAL DE SUBSTITUIÇÃO

A utilidade, por si, apresenta importância na microeconomia. Mas, mais relevante ainda, é analisar a variação da utilidade quando adicionamos uma unidade adicional de um dos bens à cesta.

Este conceito é chamado de utilidade marginal.

Ou seja, **a utilidade marginal mede a variação na utilidade dada uma variação na margem de um dos bens que compõem a cesta de consumo**.

Podemos escrever isto matematicamente para cada bem.

Vejamos:

Bem 1: $UMg_1 = \frac{\Delta U}{\Delta x_1} = \frac{u(x_1+\Delta x_1;x_2)-u(x_1,x_2)}{\Delta x_1}$

Bem 2: $UMg_2 = \frac{\Delta U}{\Delta x_2} = \frac{u(x_1;x_2+\Delta x_2)-u(x_1,x_2)}{\Delta x_2}$

Perceba que nos dois casos calculou-se o aumento na utilidade total derivado da variação do consumo do bem correspondente.

Desta forma, a variação na utilidade pode ser assim representada:

Bem 1: $\Delta U = UMg_1 \times \Delta x_1$

Bem 2: $\Delta U = UMg_2 \times \Delta x_2$

As expressões acima calculam o valor da variação na utilidade total em função da variação do consumo do bem correspondente.

É interessante notar que, ao passo que o consumidor deseja mais quantidades do bem 1, ele precisa abrir mão proporcionalmente mais de unidades do bem 2 (no caso de preferências bem comportadas, quando a TMS é decrescente).

Assim, se ele estiver disposto a abrir mão da mesma quantidade do bem 2, ele passa a obter cada vez menos do bem 1. Assim,

$\Delta U = UMg_1 \times \Delta x_1$ é menor à medida que mais unidades do bem 1 são consumidas.

Este fato resulta na famosa afirmação de que **a utilidade marginal de determinado bem é decrescente quanto mais unidades deste bem são consumidas.**

O exemplo do copo de água é clássico e autoexplicativo. O primeiro copo de água de um indivíduo com muita sede traz a ele mais utilidade do que o quarto copo, por exemplo. Ou seja, o aumento na utilidade total do indivíduo (a utilidade marginal) no primeiro copo d´água é mais elevado que o aumento no quarto copo de água.

Em outras palavras, a utilidade marginal é decrescente!

Esta ideia é basilar e fundamenta quase tudo em economia. Para você ter uma ideia, muitas teorias que se encontram na fronteira do conhecimento são simplesmente descartadas por violar esta simples hipótese de utilidade marginal decrescente.

Mas, isto não é assunto para este momento.

O que nos cabe no momento é saber que **a utilidade marginal também serve de instrumento para calcular a Taxa Marginal de Substituição (TMS).**

Lembrando que a TMS mede a taxa de troca entre dois bens em uma mesma curva de indiferença, ou seja, à utilidade constante. Além disto, ela é obtida pela inclinação da curva de indiferença, como já salientado no tópico específico.

Desta forma, a variação na utilidade tem de ser zero. Utilizando a expressão que usamos acima, temos que:

$$\Delta U = 0$$

$$(UMg_1 \times \Delta x_1) + UMg_2 \times \Delta x_2 = 0$$

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -\frac{UMg_1}{UMg_2}$$

Mas, sabemos que $\boldsymbol{TMS_{2,1}} = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$.

Então:

$$\boldsymbol{TMS_{2,1} = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -\frac{UMg_1}{UMg_2}}$$

Note que na razão entre quantidades o bem 1 está no numerador (em cima), enquanto o bem 2 está no denominador (em baixo). Na razão de utilidades marginais acontece o contrário. Mas, é assim mesmo: não se assuste.

Portanto, podemos interpretar a taxa marginal de substituição do bem 2 pelo bem 1 através da razão entre as utilidades marginais do bem 1 pelo bem 2.

7. FUNÇÕES DE UTILIDADE E CURVAS DE INDIFERENÇA

Sabendo que a utilidade serve de instrumento para ordenar as preferências, e estas podem ser representadas por curvas de indiferenças, nada mais natural do que afirmar que as **curvas de indiferença representam níveis de utilidade.** Mais propriamente, **a cada curva de indiferença pode ser atribuída uma utilidade.**

Esta afirmação é compatível com os pressupostos de preferências anteriormente apresentados. Por exemplo, curvas de indiferença mais distantes da origem são preferíveis às mais próximas, de modo que apresentam utilidade maior.

Quem tal analisarmos um exemplo de função de utilidade e construção da curva de indiferença? Vejamos!

Podemos supor que a função de utilidade pode ser representada por $\boldsymbol{u(x_1, x_2) = x_1 \times x_2}$.

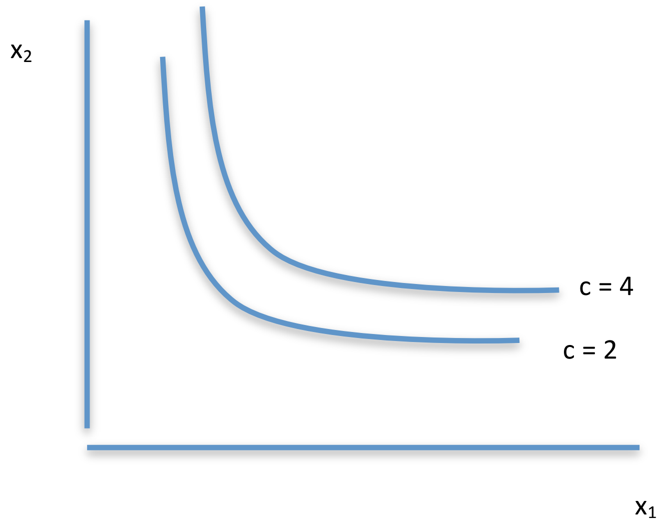
Bom, sabemos que cada curva de indiferença indica cestas de bens com a mesma utilidade, ou seja, $\boldsymbol{u}$ é constante. Há um recurso matemático para estabelecer que $\boldsymbol{u}$ é constante. Basta tirá-la do lado esquerdo da equação e colocá-la do direito (ademais, estamos chamando a utilidade de $\boldsymbol{c}$ – símbolo de constante):

$$\boldsymbol{u(x_1, x_2) = x_1 \times x_2}$$

$$\boldsymbol{x_2 = \frac{c}{x_1}}$$

Agora, pense comigo: o que acontece com x_1, caso x_2 aumente (lembrando que a utilidade é constante, não varia)? Ora, x_1 diminui!

Assim, a curva de indiferença já pode ser construída, possuindo a seguinte forma:



As curvas acima representam dois valores de utilidade: 2 e 4. Evidente que a curva de indiferença que apresenta maior utilidade (=4) está acima e à direita da outra.

Agora, vamos pensar um pouco mais. O que aconteceria se ocorresse uma transformação monotônica nas duas curvas acima apresentadas?

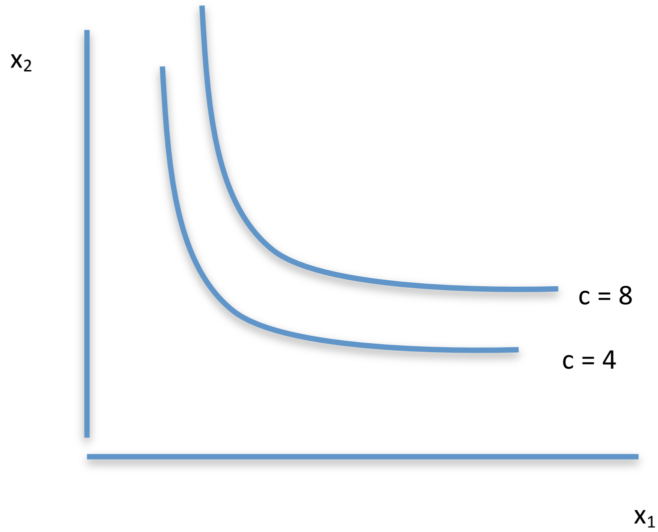
Vejamos um exemplo na forma de função e na forma gráfica.

Considere a seguinte função de utilidade:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}) = \boldsymbol{x_1^2} \times \boldsymbol{x_2^2} = (\boldsymbol{x_1} \times \boldsymbol{x_2})^2 = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2})^2$$

Ou seja, nossa nova função de utilidade $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2})$ nada mais é do que a função anterior $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2})$ ao quadrado. Há aqui uma transformação monotônica (elevar ao quadrado a função de utilidade), de modo que a nova função de utilidade possui a mesma forma e ordenação das curvas de indiferença do exemplo anterior.

Assim:



Pronto! A curva de indiferença está construída a partir de uma função de utilidade. Para facilitar sua vida, segue adiante exemplos das funções de utilidade e das curvas de indiferença resultantes mais cobradas em concursos: **substitutos perfeitos, complementares perfeitos e Cobb-Douglas.**

Substitutos Perfeitos

Como bem sabemos, bens substitutos perfeitos são aqueles que se prestam à mesma finalidade. O consumidor pode tranquilamente trocar um pelo outro e, assim, obter a mesma utilidade.

Este fato resulta em uma função de utilidade que possui, geralmente, a seguinte forma básica:

$$\boldsymbol{u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2}$$

Esta é a forma básica, mas não indica que seja a única. Por exemplo, transformações monotônicas desta função resultam em outras. No entanto, a ideia básica prevalece, assim como o ordenamento das preferências.

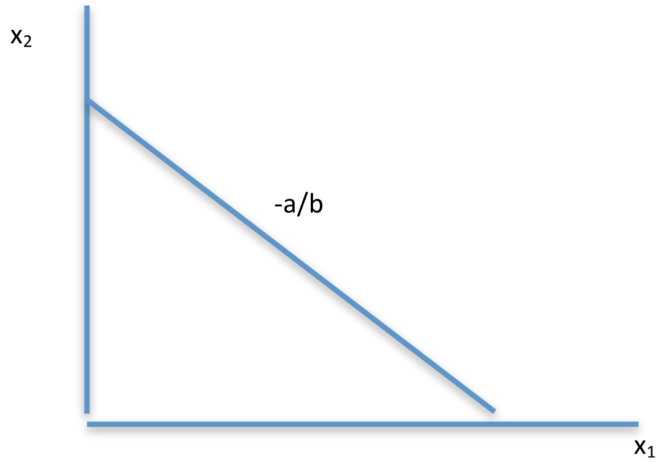
Importa-nos compreender o significado dos parâmetros ***a*** e ***b***.

Eles medem o grau de relevância do bem para o consumidor. Por exemplo, se a = 2 e b =1, significa dizer que o consumidor deseja consumir 2 unidades do bem 1 para cada unidade do bem 2 na cesta de consumo.

Dito de outro modo, o bem 1 vale duas vezes mais que o bem 2 neste exemplo.

E, lembrando que a curva de indiferença possui inclinação constante, a razão entre a e b ($\frac{a}{b}$) fornece, em módulo, o valor da inclinação da curva de indiferença – que é o valor da TMS.

O formato da curva de indiferença é o seguinte:



A taxa de troca entre o bem 2 pelo bem 1 ($TMS_{2,1}$) é dada por **–a/b.** assim, no caso de **a =2 e b =1** , temos **TMS = -2.**

<u>Complementares Perfeitos</u>

Os complementares perfeitos são os bens consumidos conjuntamente em proporções fixas.

Ao consumidor interessa tão somente o consumo na combinação fixada. O caso clássico dos pares de sapato indica que o consumo de 1 pé direito só faz sentido quando feito em conjunto com 1 pé esquerdo. Ou seja, a proporção fixa é de 1:1.

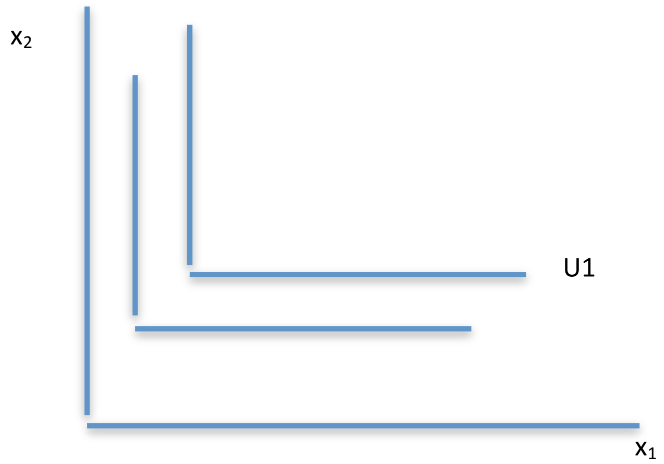
Matematicamente isto pode ser representado pela chamada **função mínimo.** Se a proporção é de 1:1, o consumidor não deseja 2 pés direito e 1 pé esquerdo. Ele deseja a combinação mínima, que é 1:1. Dito de outro modo, consumir 2:1 deixa o indivíduo na mesma curva de indiferença que está com 1:1.

Em geral, a função de utilidade deste caso possui a seguinte forma:

$$\boldsymbol{u(x_1, x_2) = min\{ax_1, bx_2\}}$$

Sendo a e b os números que indicam a proporção que os bens são consumidos conjuntamente.

Graficamente:



O consumo é estabelecido nos vértices do L, como já observado. E, adicionalmente, curvas à direita e acima representam maior utilidade (U1 > U0).

Cobb-Douglas

A função de utilidade Cobb-Douglas é muito importante em todo o curso de microeconomia, sobretudo na teoria da produção. Apresentada por dois economistas, Paul Douglas e Charles Cobb, esta função apresenta em seus expoentes o peso de cada bem na cesta do consumidor.

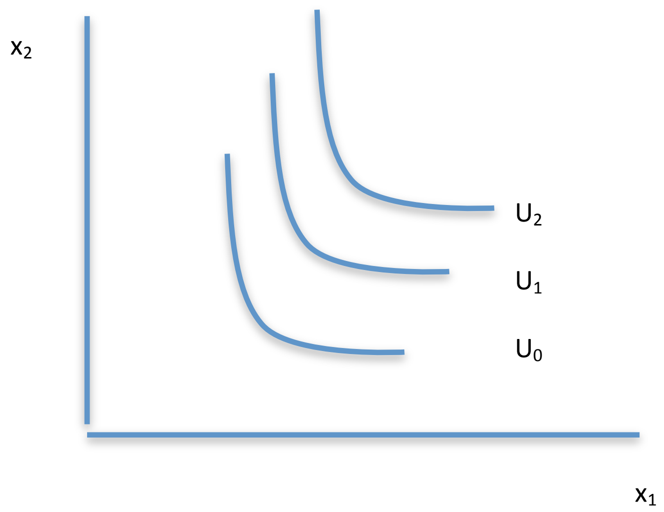
Vejamos:

$$u(x_1, x_2) = x_1^a \times x_2^b$$

Sendo **a + b = 1.**

Desta forma, o valor do parâmetro a indica o peso do bem 1 na cesta de consumo, assim como b indica o peso do bem 2. Por exemplo, se a = 0,5 e b= 0,5, cada bem representa 50% da cesta de consumo.

O gráfico deste caso pode ser apresentado da forma que segue:



E, qual será a TMS para o caso Cobb-Douglas?

A seguinte:

$$TMS = \frac{a}{b} \times \left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

Vamos descobrir como?

Simples. Como vimos acima: $TMS_{2,1} = \frac{UMg_1}{UMg_2}$. Sendo assim, basta aplicar a derivada à função Cobb-Douglas. Primeiro derivamos a função de utilidade em relação ao bem 1 (resultando na utilidade marginal em relação ao bem 1), após em relação ao bem 2 (resultando na utilidade marginal em relação ao bem 2), para obtermos a razão entre as duas utilidades marginais.

Segue abaixo o processo:

$$UMg1 = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} = a x_1^{a-1} \times x_2^{b}$$

$$UMg2 = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} = b x_1^{a} \times x_2^{b-1}$$

$$TMS_{2,1} = \frac{a x_1^{a-1} \times x_2^{b}}{b x_1^{a} \times x_2^{b-1}}$$

$$TMS_{2,1} = \frac{a}{b} \times \left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

Obviamente que não é necessário saber o processo matemático por trás da taxa marginal de substituição. Basta saber a expressão para calculá-la, como mostrado acima.

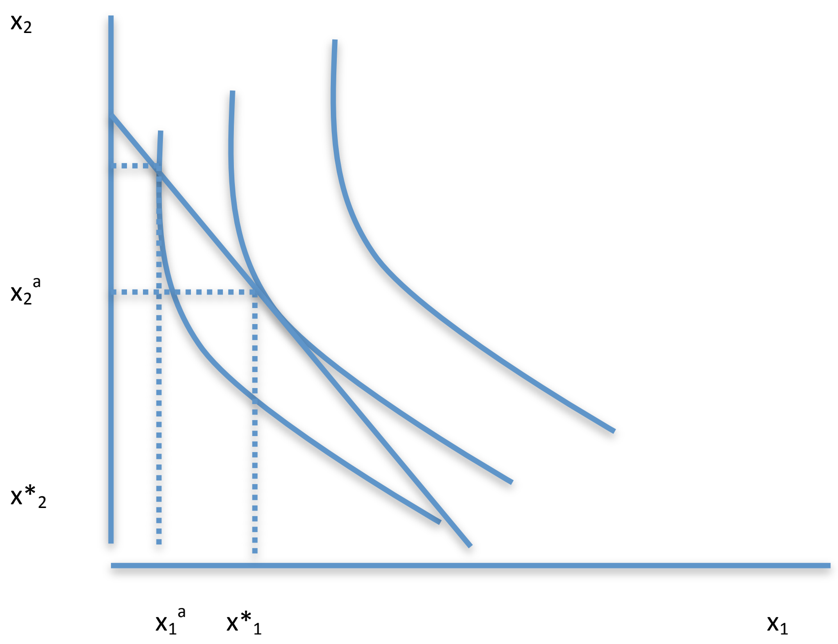
8. A ESCOLHA ÓTIMA DO CONSUMIDOR

Finalmente cá estamos para derivar a escolha do consumidor. Finalmente chegamos ao nosso objetivo!

Sabemos que o consumidor escolhe o melhor, tendo em vista suas preferências e respeitando seu conjunto orçamentário (restrição orçamentária).

Dito de outro modo, **o consumidor prefere a cesta de consumo que fornece mais utilidade (situada na curva de indiferença mais distante da origem, no caso de preferências bem comportadas), respeitando a restrição de orçamento que possui**.

Vejamos abaixo a demonstração gráfica com os devidos comentários:



O gráfico acima apresenta 3 curvas de indiferença, cada uma representando um nível de utilidade distinto. Evidente que a curva mais distante da origem apresenta a maior utilidade do ponto de vista do consumidor. A reta orçamentária é apresentada com inclinação negativa.

A escolha ótima do consumidor é dada no ponto em que a reta orçamentária tangencia a curva de indiferença mais distante da origem. Este ponto indica a cesta de consumo (x^*_1,x^*_2). Esta cesta é a escolha do consumidor, pois indica o consumo que proporciona maior utilidade e respeita a restrição orçamentária imposta.

As cestas à direita, que indicam maior utilidade, não estão disponíveis, visto que o orçamento do consumidor não as suporta. As escolhas à esquerda são possíveis, mas o consumidor pode escolher outras com maior utilidade com a renda que possui.

Vejamos o exemplo dado pela cesta (x_1^a,x_2^a). A cesta se encontra em um ponto de intersecção entre a curva de indiferença e a reta orçamentária. Mas, por qual motivo ela não é escolhida?

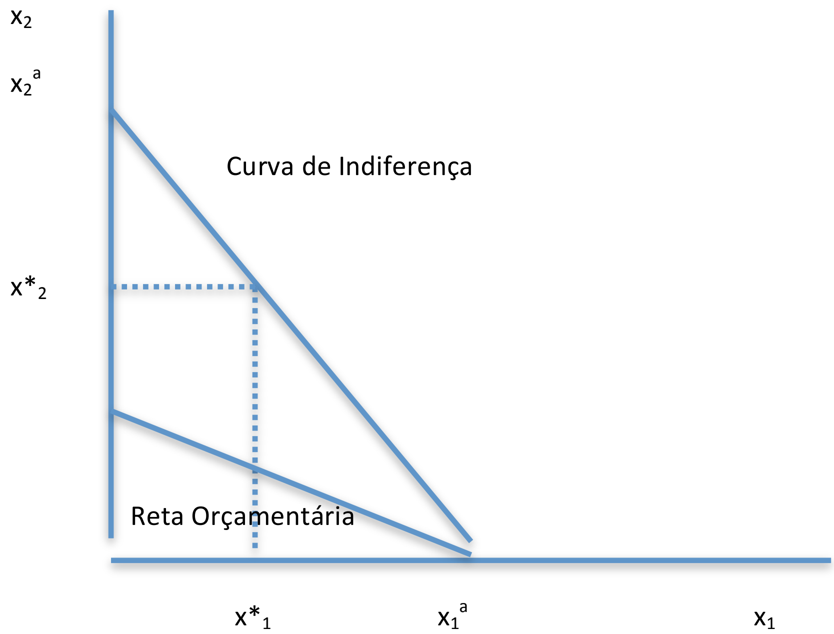
Se o consumidor se mover para a direita sobre a reta orçamentária, ele encontrará outro ponto de intersecção (tangência) entre a reta de orçamento e uma curva de indiferença que fornece mais utilidade. A escolha dele é clara: **ele prefere a curva de indiferença com mais utilidade.**

Além deste fato, interessa saber se sempre será assim. Ou seja, o consumidor escolherá sempre a cesta de bens situada na tangência entre a restrição orçamentária e a curva de indiferença com maior utilidade?

Não! Toda regra possui sua exceção.

Nos casos mais comuns, sim – o consumidor escolhe o ponto de tangência. No entanto, há alguns exemplos em que isto não acontece, como quando o consumidor se especializa.

O melhor exemplo é o caso de substitutos perfeitos. Sabemos que a curva de indiferença deste exemplo possui inclinação constante, da forma que segue:



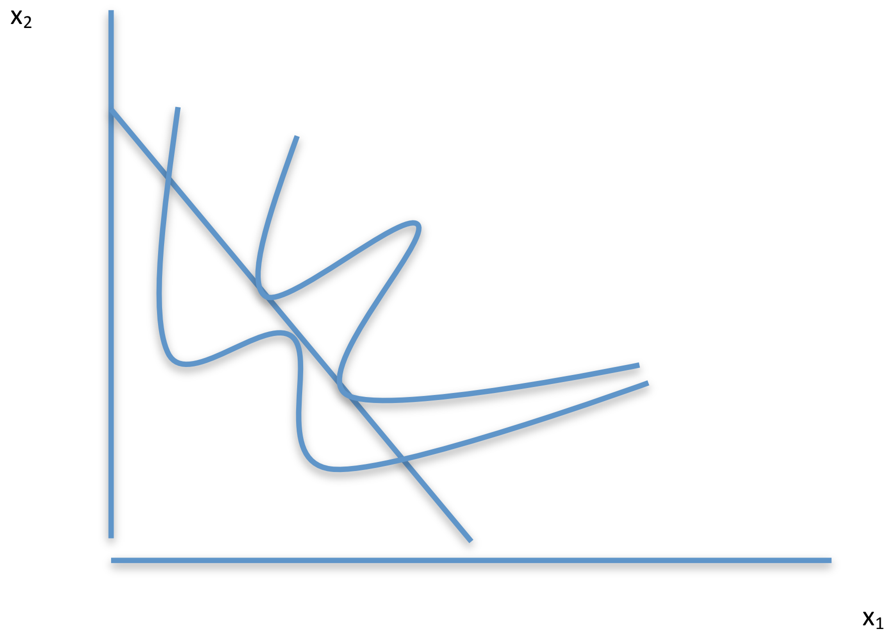
A inclinação constante da curva de orçamento indica que o consumidor troca os dois bens a uma taxa constante – TMS constante. Se o preço de um dos bens se elevar, o consumidor especializa seu consumo no outro.

Por exemplo, se x_2 subir de preço, o consumidor se especializa em x_1. A cesta de consumo, neste caso, é dada por x_1^a.

Aqui há o chamado **ótimo de fronteira (ou solução de canto).** A cesta ótima indica o consumo de apenas 1 dos bens, estando situada na fronteira do exemplo (e não no interior). Perceba que neste caso não há tangência entre curva de indiferença e reta orçamentária.

Há ainda mais uma exceção. Imagine o que ocorre quando há dois (ou mais) pontos de tangência no gráfico. Qual seria o ponto ótimo do consumidor?

É o caso de curvas de indiferença convexas (não estritamente convexas), que podem possuir partes planas, ou até mesmo convexas. Vejamos o exemplo abaixo:



Já considerando a falta de habilidade do professor em desenhos, perceba a existência de 3 pontos de tangência, sendo 2 deles na curva de indiferença que representa mais utilidade e o outro, na curva de menor utilidade. Considerando este fato, um dos pontos já pode ser desconsiderado de antemão, pois está na curva de indiferença de utilidade inferior. Os outros dois pontos estão situados na mesma curva de indiferença (indicando a mesma utilidade) e possíveis do ponto de vista orçamentário. Desta forma, a tangência entre a curva de indiferença e a reta orçamentária não determina qual a cesta escolhida.

Ou seja, mesmo que condição necessária, a tangência entre a curva de indiferença e a reta orçamentária não é suficiente para determinar a cesta escolhida.

Portanto, recorde dos 3 casos como seguem:

✓ **Ótimo Interior ➔** No caso de preferências bem comportadas (monotônicas e estritamente convexas), a escolha ótima do consumidor é dada pelo ponto de tangência entre a restrição orçamentária e a curva de indiferença que confere mais utilidade.

Diz-se que o ponto de tangência é condição necessária e suficiente para a escolha ótima.

✓ **Ótimo Interior (curvas de indiferença não estritamente convexas)** ➔ Para curvas de indiferença convexas (não estritamente convexas), a existência de partes planas (ou até mesmo côncavas), possibilita que a reta orçamentária tangencie a curva de indiferença em mais de 1 ponto, havendo mais de 1 cesta passível de escolha. Neste caso, o ponto de tangência é apenas condição necessária para achar a escolha ótima, mas não suficiente.

✓ **Ótimo de Fronteira** ➔ Não há tangência entre a reta orçamentária e a curva de indiferença. O consumidor se especializa no consumo de 1 dos bens, como no caso dos substitutos perfeitos

E, finalmente, quais outros significados econômicos possuem os pontos ótimos do consumidor?

Fazendo algumas manipulações matemáticas na condição de ponto ótimo (ponto de tangência entre reta orçamentária e curva de indiferença), que omitimos aqui pois não é nosso objetivo compreender, chegamos à seguinte condição:

$$\frac{UMg_1}{p1} = \frac{UMg_2}{p2}$$

A expressão acima que, no ponto de escolha ótima do consumidor, o aumento marginal na utilidade derivada do consumo do bem 1 para o gasto adicional no mesmo bem $\left(\frac{UMg_1}{p1}\right)$ é **igual** ao aumento marginal na utilidade derivada do consumo do bem 2 para o gasto adicional neste bem $\left(\frac{UMg_2}{p2}\right)$.

A igualdade obtida entre estes dois termos indica que o consumo marginal adicional do bem 1 traz tanta utilidade quanto o consumo marginal adicional do bem 2, pelo que o consumidor consome em sua cesta uma quantidade diversificada destes bens.

Imagine que isto não ocorre. Por exemplo:

$$\frac{UMg_1}{p1} > \frac{UMg_2}{p2}$$

O aumento marginal na utilidade derivada do consumo do bem 1 para o gasto adicional no mesmo bem $\left(\frac{UMg_1}{p1}\right)$ é **maior** ao aumento marginal na utilidade derivada do consumo do bem 2 para o gasto adicional neste bem $\left(\frac{UMg_2}{p2}\right)$.

Neste caso, o consumidor escolheria especializar no bem 1, pois este traz utilidade marginal superior ao bem 2. Ou seja, aqui haveria uma solução de canto (ótimo de fronteira) em que a cesta seria especializa no consumo do bem 1.

Saber fazer comparações como esta, entre utilidades marginais e preços dos bens é vital na microeconomia.

Mas, a lógica é simples. Se o benefício derivado do consumo adicional de 1 bem (utilidade marginal) é superior ao custo marginal em se consumir este mesmo bem (preço), o indivíduo provavelmente irá consumir mais deste bem. Ora, ele obtém mais benefício do que custo neste caso.

A igualdade na situação indica que o consumidor está satisfeito com uma cesta de consumo balanceada – algo implícito na situação de preferência bem comportada.

Como as bancas, ora ou outra, fazem questionamentos sobre estes raciocínios, é importante que você se recorde dele.

9. DEMANDA ÓTIMA DO CONSUMIDOR

Sabendo que a condição de escolha ótima do consumidor, é um passo para sabermos quanto de cada bem é consumido.

Ou seja, considerando que o consumidor demanda a cesta ótima (x^*_1, x^*_2) ao respeitar a condição de escolha ótima (no caso de preferências bem comportadas, o ponto de tangência entre a reta orçamentária e a curva de indiferença com maior utilidade), só resta saber a quantidade de cada bem demandada.

A função de demanda é a função que relaciona a escolha ótima considerando a renda do consumidor e o preço dos bens.

É muito comum as bancas solicitarem (geralmente com exemplos sem números) este conhecimento. Apesar de aparentemente complexo, pois envolve um pouco de álgebra, a notação final é de simples assimilação. E, é ela que devemos guardar para a prova!

Nos 3 exemplos citados abaixo é considerado que a quantidade demandada do bem é função do preço do mesmo bem, do preço do outro bem e da renda. A notação para este fato é a seguinte:

X_1 (p_1,p_2,m)

X_2 (p_1,p_2,m)

➡ **Para cada conjunto de preços (p_1, p_2) e renda (m) haverá uma combinação diferente de bens que corresponderá à escolha ótima do consumidor**

Seguimos com o exemplo das três principais formas de preferências: **Bens Substitutos Perfeitos, Bens Complementares Perfeitos e Cobb-Douglas.**

<u>Bens Substitutos Perfeitos</u>

É sabido que bens substitutos perfeitos são aqueles que se prestam à mesma finalidade, podendo ser substituídos um pelo outro sem qualquer prejuízo ao consumidor.

A existência de substitutos perfeitos resulta em 3 situações de demanda para o consumidor. Se o bem 1 é mais barato que o bem 2, o consumidor se especializa no bem 1 (gasta toda sua renda em 1). Se o bem 2 é o mais barato, a especialização é no bem 2 (gasta toda sua renda em 2). Se os dois bens possuem preços iguais, o consumidor não sem importa com qual irá consumir.

E, qual a forma da função de demanda para ambos os bens? Vejamos:

Bem 1 (x_1):

- Se p1 < p2:

  $\boldsymbol{X_1 = \left(\frac{m}{p_1}\right)}$ (toda a renda é gasta no bem 1)

- Se p1 > p2:

  $\boldsymbol{X_1 = 0}$ (o consumidor não demanda nenhuma unidade do bem 1)

- Se p1 = p2:

  $\boldsymbol{0 \ll x1 \ll \left(\frac{m}{p1}\right)}$ (o consumidor demanda uma quantidade entre zero unidades e todas as unidades possíveis com sua renda)

Bem 2 (x_2):

- Se p2 < p1:

  $\boldsymbol{X_2 = \left(\frac{m}{p_2}\right)}$ (toda a renda é gasta no bem 2)

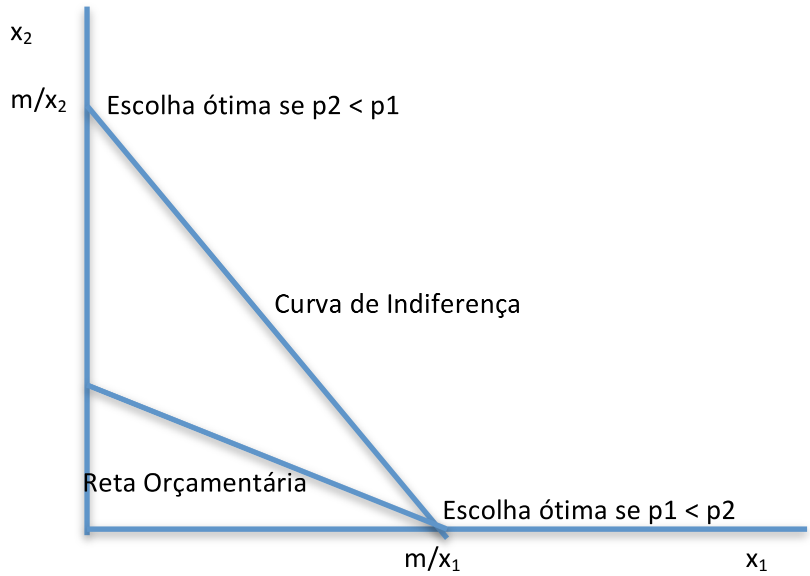
- Se p2 > p1:

  $\boldsymbol{X_2 = 0}$ (o consumidor não demanda nenhuma unidade do bem 2)

- Se p2 = p1:

  $\boldsymbol{0 \ll x2 \ll \left(\frac{m}{p2}\right)}$ (o consumidor demanda uma quantidade entre zero unidades e todas as unidades possíveis com sua renda).

Graficamente, esta situação específica pode assim ser apresentada:



Bens Complementares Perfeitos

No caso de complementares perfeitos, o consumidor buscará consumir ambos os bens conjuntamente em proporções fixas. Digamos, por exemplo, que o preço de x_1 é reduzido, indicando aumento na demanda do mesmo. Se a proporção de consumo entre o bem 1 e o bem 2 é de 1:1, o aumento na demanda do bem 1 em q unidades provoca o mesmo aumento na demanda pelo bem 2 (afinal, eles são consumidos na mesma proporção).

Esta ideia é facilmente representável na relação a seguir:

$$\boldsymbol{ax_1 = bx_2}$$

$$\boldsymbol{pax_1 \times pbx_2 = M}$$

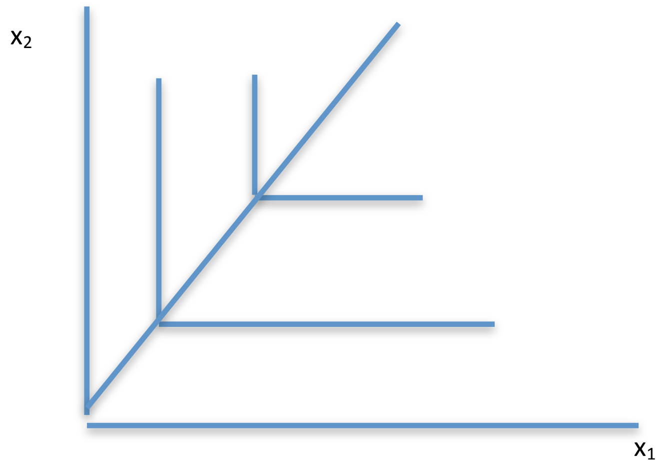
$$\boldsymbol{sendo\ que\ a\ e\ b\ representam\ a\ propor\text{ção}\ que\ os\ bens\ \text{são}\ consumidos}$$

Se, por exemplo, considerarmos que os dois bens são consumidor na proporção de 1:1 (a = 1 e b = 1), podemos afirmar que:

$$\boldsymbol{x_1 = x_2 = \frac{M}{p1 + p2}}$$

Ou seja, a quantidade demandada pelo bem 1 é igual à quantidade demandada pelo bem 2 (a quantidade ótima é dada pela divisão entre a renda do consumidor a soma dos preços dos dois bens).

Graficamente, temos que:



As cestas ótimas são indicadas pelos vértices das curvas de indiferença.

Cobb-Douglas

A função de utilidade Cobb-Douglas apresenta em seus expoentes o peso de cada bem na cesta do consumidor.

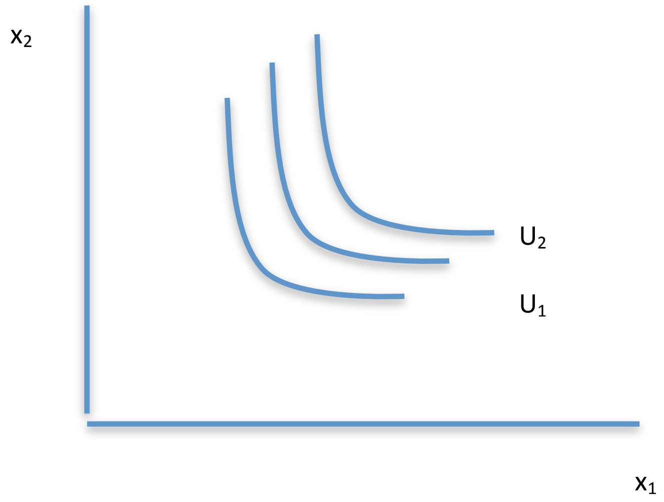
Vejamos:

$$u(x_1, x_2) = x_1^a \times x_2^b$$

Sendo **a + b = 1.**

Desta forma, o valor do parâmetro a indica o peso do bem 1 na cesta de consumo, assim como b indica o peso do bem 2. Por exemplo, se a = 0,5 e b= 0,5, cada bem representa 50% da cesta de consumo.

O gráfico deste caso pode ser apresentado da forma que segue:



E, qual será a TMS para o caso Cobb-Douglas? Como já mostramos anteriormente, a seguinte:

$$\boldsymbol{TMS = \frac{a}{b} \times \left(\frac{x_2}{x_1}\right)}$$

E a função de demanda?

Aqui entra um interessante processo para descobri-la, chamado de processo de Lagrange, em homenagem ao matemático Joseph-Louis Lagrange, responsável pela sua formalização.

Como sabemos, a escolha ótima do consumidor passa pela maximização da utilidade condicionada à restrição orçamentária. Pois bem, é exatamente este o resultado do processo de Lagrange, isto é, otimizar de maneira condicionada uma função. Para nossos fins, será preciso encontrar o máximo da função utilidade (nosso objetivo), sujeito à restrição orçamentária (nossa condição).

Matematicamente:

$$\boldsymbol{max\colon u(x_1, x_2) = x_1^a \times x_2^b}$$

$$\boldsymbol{sujeito \text{ à: } p_1 x_1 + p_2 x_2 = M}$$

Para montarmos a expressão de Lagrange é preciso proceder da seguinte forma:

$$L = x_1^a \times x_2^b + \Lambda(M - p_1x_1 - p_2x_2)$$

Note que a função a ser maximizada vem primeiro do lado esquerdo da expressão. Após ela aparece o multiplicador de Lagrange **(Λ)** e, por fim, a função que condiciona a escolha, a restrição orçamentária **($M - p_1x_1 - p_2x_2$).**

Agora, é preciso derivar a função de Lagrange em relação à x1 e x2:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = ax_1^{a-1} \times x_2^b - \Lambda p_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = bx_1^a \times x_2^{b-1} - \Lambda p_2$$

Por fim, é preciso obter a razão entre as expressões da forma que segue:

$$\frac{-\Lambda p_1}{-\Lambda p_2} = \frac{ax_1^{a-1} \times x_2^b}{bx_1^a \times x_2^{b-1}}$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{a}{b}\frac{x_2}{x_1}$$

Obtendo em função de x2:

$$\frac{b}{a}p_1x_1 = p_2x_2$$

Substituindo este resultado na restrição orçamentária:

$$p_1x_1 + p_2x_2 = M$$

$$p_1x_1 + \frac{b}{a}p_1x_1 = M$$

$$p_1x_1(1 + \frac{b}{a}) = M$$

$$p_1x_1\left(\frac{a+b}{a}\right) = M$$

$$x_1 = \frac{a}{a+b} \times \frac{M}{p_1}$$

O mesmo processo também é aplicado para descobrir a função de demanda de x2, de modo que ficamos com:

$$x_2 = \frac{b}{a+b} \times \frac{M}{p2}$$

Sendo assim, as funções de demanda para x_1 e x_2 respectivamente:

$$x_1 = \frac{a}{a+b} \times \frac{M}{p1}$$

$$x_2 = \frac{b}{a+b} \times \frac{M}{p2}$$

Eu concordo: o procedimento é complexo e longo demais para você resolver em uma prova de concurso público. Por isto, guarde as funções de demanda apresentadas (substitutos perfeitos, complementares perfeitos e Cobb-Douglas) que é mais do que suficiente.

Que tal analisarmos um exemplo do certame de 2013 do Bacen? O exemplo é dos mais complexos possíveis e está aqui para você perceber o quão longe poder ir a banca. Mesmo que complexo, para achar o resultado basta usar as igualdades matemáticas apresentadas.

Vejamos.

01. CESPE/ANALISTA DO BANCO CENTRAL (AREA 6)/2013

Considerando que o problema do consumidor seja resolvido por meio da função utilidade $u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}} + 4x_1^{\frac{1}{2}}$ **, julgue o item a seguir. Nesse sentido, as demandas marshallianas dos bens 1 e 2, x_i (p_1 , p_2 , w), em que p_1 é o preço do bem 1, p_2 é o preço do bem 2 e w é a riqueza do consumidor.**

A demanda do consumidor pelo bem 1 é dada por

$$x_1\left(p_1, p_2, w\right)\frac{p_2 w}{p_1 p_2} + 4p_1^2$$

A questão tenta complicar se utilizando de termos mais complexos (demanda marshalliana) e funções de utilidade mais complicadas. No entanto, a demanda marshalliana é a função de demanda como vimos.

A questão pode ser resolvida em dois momentos.

Primeiro, é necessário compreender que, no equilíbrio, o consumidor se encontra na seguinte situação:

$$\frac{Umg_{x1}}{Umg_{x2}} = \frac{p1}{p2}$$

Ou seja, a razão entre as utilidades marginais dos bens 1 e 2 é igual a razão de preços destes mesmos bens.

Agora, faz-se necessário encontrar as utilidades marginais (derivadas parciais de primeira ordem da função de utilidade) e colocar na expressão acima.

Abaixo, segue passo a passo.

$$\frac{Umg_{x1}}{Umg_{x2}} = \frac{p1}{p2}$$

$$Umg_{x1} = \frac{dU}{dx1}$$

$$Umg_{x1} = \frac{1}{2} \times 2x^{\frac{1}{2}-1}$$

$$Umg_{x1} = \frac{1}{x1^{\frac{1}{2}}}$$

$$Umg_{x2} = \frac{dU}{dx2}$$

$$Umg_{x2} = \frac{1}{2} \times 4{x_2}^{\frac{1}{2}-1}$$

$$Umg_{x2} = \frac{2}{{x_2}^{\frac{1}{2}}}$$

Colocando os valores das utilidades marginais na expressão de equilíbrio do consumidor, temos que:

$$\frac{\frac{\frac{1}{x_1^{\frac{1}{2}}}}{2}}{x_2^{\frac{1}{2}}} = \frac{p1}{p2}$$

$$\frac{1}{2} \times (\frac{x_2}{x_1})^{\frac{1}{2}} = \frac{p1}{p2}$$

$$x_2 = \frac{4{p_1}^2}{p_2^2} \times x_1$$

Por fim, devemos saber que o consumidor esgota sua renda (w) com a demanda pelos bens. Isto é, sua restrição orçamentária nos diz que o valor demandado pelo bem 1 mais o valor demandado pelo bem 2 é igual á renda: $\boldsymbol{p1x1 + p2x2 = w}$

Substituindo x2 na expressão de restrição orçamentária acima, temos que:

$$x_1.p_1 + \left(\frac{4.p_1^2}{p_2^2}.x_1\right).p_2 = w$$

$$x_1\left(p_1 + \left(\frac{4.p_1^2}{p_2}\right)\right) = w$$

$$x_1 = \frac{w}{\left(\frac{p_1.p_2 + 4.p_1^2}{p_2}\right)}$$

$$x_1 = \frac{w.p_2}{p_1.p_2 + 4.p_1^2}$$

Desta forma, a expressão de demanda do consumidor pelo Bem 1 apresentada pela questão está incorreta.

GABARITO: ERRADO