I. Variáveis Aleatórias

Olá, Pessoal! Tudo em paz? Como vão os estudos?

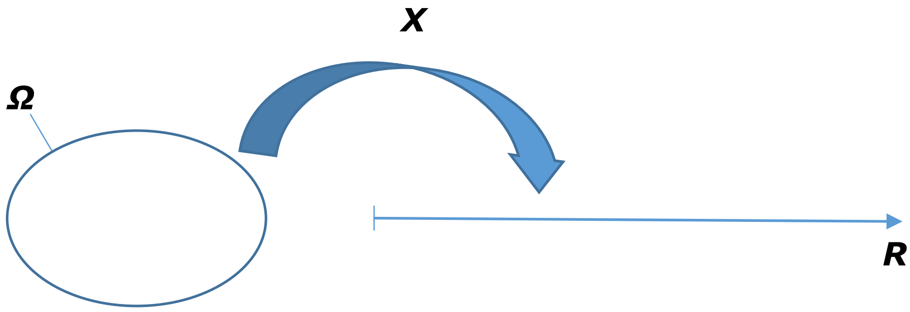
Segue um pequeno artigo introdutório sobre Variáveis Aleatórias.

I.1 Conceito

Bem, se você ler a definição de Variáveis Aleatórias (chamaremos de VA a partir de agora, ok?) em qualquer livro de Estatística por aí, você não vai entender muita coisa! Veja:

A Variável aleatória X é uma função que associa cada elemento do espaço amostral (Ω) de determinado experimento aleatório a um número Real (R).

$$X: \Omega \rightarrow R$$



Fica bem abstrato de entender com a definição pura e simples. Então, vamos passar a explicar com um exemplo, ok?

Estão lembrados da definição de experimentos aleatórios?

Experimentos aleatórios: *são experimentos que, quando repetidos, produzem resultados que não podem ser previstos, ou seja, resultados aleatórios!*

Abaixo, seguem exemplos clássicos de experimentos aleatórios que são estudados pela probabilidade e estão sempre caindo em exercícios:

1. *Jogar uma moeda pro alto e observar a face que cai voltada para cima (o resultado é aleatório: cara ou coroa). O espaço amostral deste experimento é Ω = {cara,coroa}.*
2. *Jogar um dado pro alto e observar a face que cai voltada para cima (o resultado é aleatório:1, 2, 3, 4, 5 ou 6). O espaço amostral deste experimento é Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.*

Pois bem, vamos pegar o segundo experimento e entender o que faz a variável aleatória X. Ela simplesmente pega cada um dos valores do espaço amostral (1,2,3,4,5,6) e associa a um número Real x.

Suponhamos que nós repitamos este experimento 5 vezes e seja X a VA que mede a quantidade de vezes que determinado número se repete. Por exemplo, queremos saber quantas vezes sai o número 6 em 5 lançamentos de dado.

- Ora, se o experimento é repetido 5 vezes, quantas "6" podemos ter?
- Ué, Professor! 5, 4, 3, 2, 1 ou nenhum.

Exatamente, caro Aluno! Então, podemos afirmar que a VA X pode assumir os valores x: 0, 1, 2, 3, 4 e 5.

- Entendi, Mestre! Mas e daí? Para que serve essa nova definição de "Variáveis Aleatórias"?
- Vamos com calma, caro Aluno...Uma coisa de cada vez...

I.2 Tipos de Variáveis Aleatórias

As variáveis aleatórias podem ser discretas ou contínuas.

DESPENCA na prova

As variáveis aleatórias discretas são aquelas cuja quantidade de valores que podem assumir é enumerável.

As variáveis aleatórias contínuas são aquelas cuja quantidade de valores que podem assumir não é enumerável.

Exemplo de VA discreta:
X: VA que mede a **quantidade** de vezes que dá 6 no dado em 5 lançamentos. Ela pode assumir os valores: 0, 1, 2, 3, 4 e 5. Trata-se de uma lista de valores que pode ser contada, ou seja, são enumeráveis.

Exemplo de VA contínua:
T: VA que mede a o **tempo** médio de vida de uma lâmpada. Sabe-se que o tempo de vida dessa lâmpada é de 3 a 6 horas. Dentro desse intervalo, T pode assumir qualquer valor real, com uma infinidade de possibilidades. Imaginem que temos um relógio com uma precisão infinita de tempo; assim poderíamos ter os seguintes valores no espaço amostral: 3,634642641642641..., 5,19484848948944..., 4,14157462641648...
Trata-se de uma lista infinita de valores, ou seja, uma quantidade não enumerável.

Para VA contínuas, não faz sentido falarmos em valores pontuais assumidos, mas sim intervalos de valores. Pode ser interessante, neste caso, saber a probabilidade de que o **tempo** médio de vida de uma lâmpada esteja compreendido, por exemplo, entre 4 e 5 horas.

I.3 Distribuição de Probabilidade para VA discretas

Retomemos o nosso exemplo de nossa VA discreta:

X: VA que mede a **quantidade** de vezes que dá 6 no dado em 5 lançamentos. Ela pode assumir os valores: 0, 1, 2, 3, 4 e 5.

Interessar-nos-á, nesse momento, calcular as probabilidades de que X assuma cada um dos seus possíveis valores (0, 1, 2, 3, 4 e 5). Por isso, estudamos probabilidade antes de VA.

Até aqui tudo bem?

Beleza...Então vamos prosseguir...

<u>P(X=0)=?</u>
A probabilidade de que X=0 é igual à probabilidade de que não tenhamos nenhum "6" em 5 lançamentos de dado. Tal probabilidade é dada por:

$$P(X=0)=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\left(\frac{5}{6}\right)^5=40{,}19\%$$

Obs.: Lembre-se: a probabilidade de dar 6 em um lançamento é 1/6 e a probabilidade de dar um número diferente de 6 é 5/6.

<u>P(X=1)=?</u>

A probabilidade de que X=1 é igual à probabilidade de que tenhamos apenas um "6" em 5 lançamentos de dado. Tal probabilidade é dada por:

$$P(X=1) = C_1^5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = 5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 40{,}19\%$$

Obs.: Lembre-se: a combinação (C_1^5) representa a quantidade de maneiras que posso escolher 1 lançamento dentre os 5 possíveis.

P(X=2)=?

A probabilidade de que X=2 é igual à probabilidade de que tenhamos dois "6" em 5 lançamentos de dado. Tal probabilidade é dada por:

$$P(X=2) = C_2^5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = 10 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 16{,}07\%$$

Obs.: Lembre-se: a combinação (C_2^5) representa a quantidade de maneiras que posso escolher 2 lançamentos dentre os 5 possíveis.

P(X=3)=?

A probabilidade de que X=3 é igual à probabilidade de que tenhamos três "6" em 5 lançamentos de dado. Tal probabilidade é dada por:

$$P(X=3) = C_3^5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = 10 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 3{,}21\%$$

Obs.: Lembre-se: a combinação (C_3^5) representa a quantidade de maneiras que posso escolher 3 lançamentos dentre os 5 possíveis.

P(X=4)=?

A probabilidade de que X=4 é igual à probabilidade de que tenhamos quatro "6" em 5 lançamentos de dado. Tal probabilidade é dada por:

$$P(X=4) = C_4^5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = 5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 = 0{,}32\%$$

Obs.: Lembre-se: a combinação (C_4^5) representa a quantidade de maneiras que posso escolher 4 lançamentos dentre os 5 possíveis.

P(X=5)=?

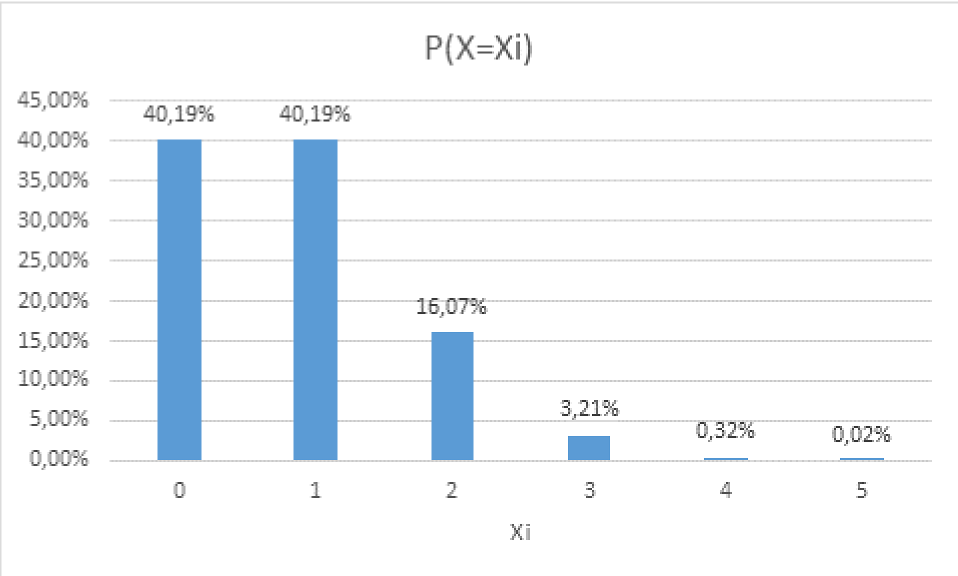
A probabilidade de que X=5 é igual à probabilidade de que tenhamos cinco "6" em 5 (ou todos!) lançamentos de dado. Tal probabilidade é dada por:

$$P(X=5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^5 = 0{,}02\%$$

Resumindo, temos:

X_i	$P(X=X_i)$
0	40,19%
1	40,19%
2	16,07%
3	3,21%
4	0,32%
5	0,02%

Podemos construir um gráfico com as probabilidades $P(X=X_i)$:



Obs.: Observe que a Probabilidade P(X=Xi) apresentas algumas características importantes:

1) *É sempre maior ou igual que zero;*
2) *O somatório delas é igual a 100%;*
3) *Só faz sentido defini-la para VA discretas. Para VA contínuas, não há que se falar em P(X=Xi).*

Função Distribuição de Probabilidade (FDP)

CAIU na prova!

A Função Distribuição de Probabilidade (FDP) nada mais é do que a probabilidade da **VA** X assumir valores **menores ou iguais** a x, onde x é um número real. É representada por F(x).

Para uma variável aleatória discreta, a Função Distribuição de Probabilidade (FDP) é dada pelo somatório das probabilidades de que X assuma valores menores ou iguais a iguais a x.
Assim:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=0}^{i} P(X = x_i)$$

Exemplificando:

No exemplo anterior, calcule a probabilidade de, em 5 lançamentos de um dado, obtermos até 3 números 6.

Ora, estamos procurando saber a probabilidade da VA X ser menor ou igual a 3, ou seja, F(3). Pela fórmula:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=0}^{i} P(X = x_i)$$

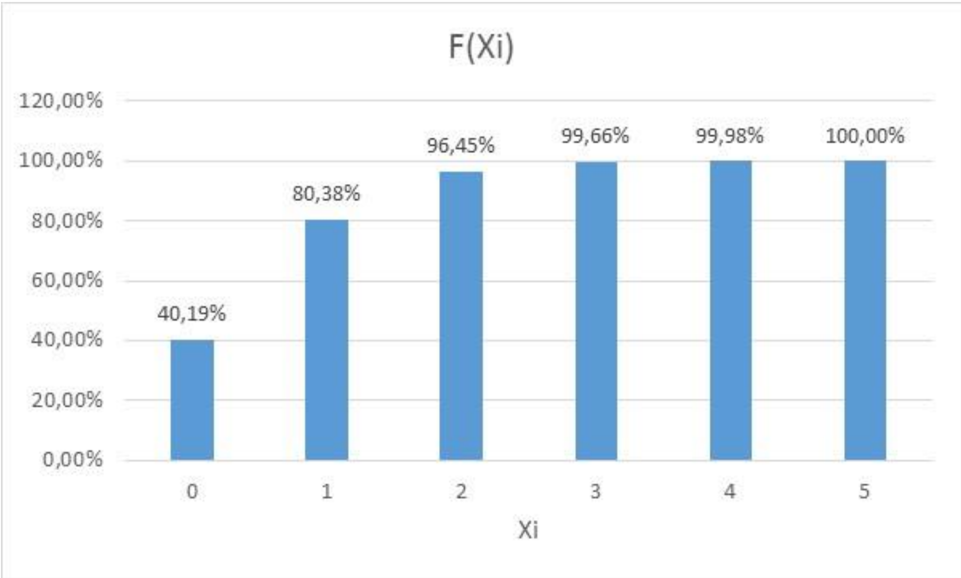
$$F(3) = P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$F(3) = 40{,}19 + 40{,}19 + 16{,}07 + 3{,}21 = 99{,}66\%$$

Analogamente, podemos construir a seguinte tabela de FDP:

X_i	***$F(X_i)$***
0	40,19%
1	80,38%
2	96,45%
3	99,66%
4	99,98%
5	100,0%

Podemos construir um gráfico da $F(X_i)$:



CAIU na prova!

Observe que, dada uma FDP, representada por F(x), para calcular $P(X=x_i)$, basta fazer a diferença: $F(x_i)-F(x_{i-1})$

Vamos ver como esses conceitos foram cobrados em concurso público?

Questão 1: ESAF - Ana IRB/Geral/2004
Uma amostra de tamanho 200 com valores possíveis 0,1,2,3 e 4 produziu a função de distribuição empírica seguinte:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0,325, & 0 \leq x < 1 \\ 0,650, & 1 \leq x < 2 \\ 0,850, & 2 \leq x < 3 \\ 0,975, & 3 \leq x < 4 \\ 1, & 4 \leq x \end{cases}$$

Assinale a opção que dá o número de observações amostrais iguais a 3.
a) 195
b) 170
c) 130
d) 65
e) 25

SOLUÇÃO:

Para calcular P(X=3), basta fazer F(3)-F(2).
Do gráfico,
F(3)=0,975
F(2)=0,850

P(X=3) = 0,975 – 8,850 = 0,125
Como a amostra tem 200 indivíduos, n=200x0,125 = 25

Gabarito: Letra E
* * * * * * *

E então, Amigos?

Gostaram do Artigo? Estou à disposição para retirar eventuais dúvidas no e-mail felipelessa@estrategiaconcursos.com.br

Se quiserem se juntar a um de nossos Cursos, será um prazer recebe-los:

https://www.estrategiaconcursos.com.br/cursosPorProfessor/felipe-lessa-3291/

Grande Abraço!

Bons Estudos e um Ótimo 2015!!!!

Prof. Felipe Lessa